विध्न विचारत भीरु जन, नहीं आरम्भे काम,
विपति देख छोड़े तुरंत मध्यम मन कर श्याम।
पुरुष सिंह संकल्प कर, सहते विपति अनेक,
'बना' न छोड़े ध्येय को, रघुबर राखे टेक।।

रचितः मानव धर्म प्रणेता
सद्गुरु श्री रणछोड़दासजी महाराज

सदिश (Vector)

सदिष और उनका निरूपण (Vectors and their representation) :

सदिष राषियों को निष्चित परिमाण और निष्चिम दिषा से परिभाषित किया जाता है। संकेत रूप में एक सदिष राषि को दिष्ट रेखाखण्ड (Directed line segment) अर्थात् $\overrightarrow{AB}$ द्वारा दर्षाया जाता है। A को प्रारम्भिक बिन्दु और B को अन्तिम बिन्दु कहते हैं। सदिष $\overrightarrow{AB}$ के परिमाण को $|\overrightarrow{AB}|$ से प्रदर्षित किया जाता हैं।

शून्य सदिष (Zero Vector) :

शून्य परिमाण के सदिष को शून्य कहतें है अर्थात् जिसका प्रारम्भिक बिन्दु एवं अन्तिम बिन्दु समान होता है। इसे O से प्रदर्षित किया जाता है। शून्य सदिष की दिषा अनिर्धाये होती है।

इकाई सदिष (Unit Vector) :

इकाई परिमाण वाला सदिष जिसकी दिषा दिये गये सदिष $\vec{a}$ की दिषा में हो, $\vec{a}$ के अनुदिष इकाई सदिष कहलाता है और इसे $\hat{a}$ द्वारा निरूपित किया जाता है। संकेत रूप में $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

समान सदिष (Equal Vectors) :

दो सदिष समान कहलाते है यदि उनके परिमाण तथा दिषा समान हो दोनों एक ही भोतिक राषि को निरूपित करते हो।

संरेखीय सदिष (Collinear Vectors):

दो सदिष संरेखीय कहलाते हैं यदि उनके दिष्ट रेखाखण्ड (directed line segments) समान्तर हों जबकि इनकी दिषाओं का समान होना आवष्यक नहीं है। संरेखीय सदिष समान्तर सदिष भी कहलाते हैं।

यदि इनकी दिषा एक समान हो, तो इन्हें समदिष सदिष (like vectors) कहा जाता है अन्यथा इन्हें असमदिष सदिष (unlike vectors) कहते है।

सकेंत रूप में, दो अषून्य सदिष $\vec{a}$ और $\vec{b}$ संरेखीय होगें यदि और केवल यदि $\vec{a} = K\vec{b}$, जहॉं $K \in R$ सदिष $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ और $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ सरेखीय होगें यदि $\dfrac{a_1}{b_2} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$

समतलीय सदिष (Coplanar Vector) :

दिये गये विभिन्न समतलीय कहलाते हैं यदि उनके रेखाखण्ड एक दिये गये समतल के समान्तर हो।

"दो सदिष हमेशा समतलीय होते हैं।".

सदिष राषि का अदिष राषि से गुणन (Multiplication of a vector by a scalary) :

यदि $\vec{a}$ एक सदिष है और m एक अदिष है, तो $m\vec{a}$, सदिष $\vec{a}$ के समान्तर एक सदिष है जिसका परिमाण $\vec{a}$ के परिमाण का |m| गुना है। इस गुणन को अदिष गुणन कहते हैं। यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ सदिष है और m,n अदिष है, तो

$m(\vec{a}) = (\vec{a})m = m\vec{a}$ $\qquad$ $m(n\vec{a}) = n(m\vec{a}) = (mn)\vec{a}$

$(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$ $\qquad$ $m(a+\vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

सदिषों का योग (Addition of vectors) :

(i) यदि दो सदिषों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ को क्रमषः OA और OB से निरूपित किया जाए, तो उनके योगफल $\vec{a}+\vec{b}$ को एक सदिश $\vec{OC}$ से निरूपित किया जाता है, जहाँ OC समान्तर चतुर्भुज OACB का विकर्ण है।

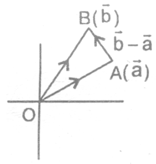
(ii) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ $\qquad$ (iii) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

(iv) $\vec{a}+\vec{0} = \vec{a} = \vec{0}+\vec{a}$ $\qquad$ (v) $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0} = (-\vec{a})+\vec{a}$

(vi) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \leq \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$ $\qquad$ (vii) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| \geq |$

किसी बिन्दु का स्थिति सदिश (Position vector of a point) :

माना O मूल बिन्दु है, तो एक बिन्दु P का स्थिति सदिष, सदिष $\overrightarrow{OP}$ है। यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो बिन्दुओं A और B के स्थिति सदिष हैं, तो



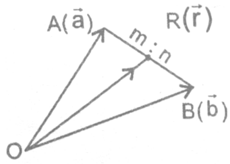
$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = B$ का स्थिति सदिष $-A$ का स्थिति सदिष

दूरी सूत्र (DISTANCE FORMULA)

दो बिन्दुओं A ($\vec{a}$) और B($\vec{b}$) के मध्य दूरी $AB = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$

विभाजन सूत्र (SECTION FORMULA)

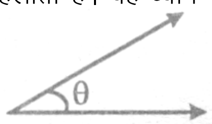
यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो बिन्दुओं क्रमषः A और B के स्थिति सदिष हैं, तो AB को m:n के अनुपात में विभाजित करने वाले किसी बिन्दु का स्थिति सदिष $\vec{r} = \dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$ होता है।

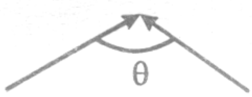


नोट : यहाँ AB के मध्य बिन्दु का स्थिति सदिष $= \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

दो सदिशों के मध्य कोण (Angle between two vectors) :

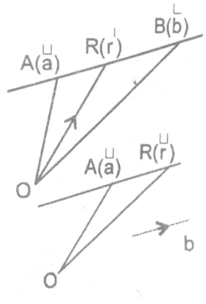
दो सदिषों की दिषा को स्थिर रखते हुए उनके अन्तिम या प्रारम्भिक बिन्दुओं को मिलाने पर बनने वाला छोटा कोण, इन सदिषों के मध्य कोण कहलाता है। यह ध्यान देने योग्मय है कि $0^0 \leq \theta \leq 180^0$.





रेखा का सदिश समीकरण (Vector equation of a line) :

दो बिन्दुओं A($\vec{a}$) और B($\vec{b}$) से गुजरने वाली एक रेखा का प्राचलिक सदिष समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + t(\vec{b}-\vec{a})$ से दिया जाता है, जहाँ 't' एक प्राचल हैं। यदि रेखा A($\vec{a}$) से गुजरती है और सदिष $\vec{b}$ के समान्तर है, तो इसका समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ होता है।



दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के कोण समद्विभाजक की दिशा में एक सदिश $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ होता है। अतः दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ का कोण समद्विभाजक $\lambda(\hat{a}+\hat{b})$ होता हैं, जहाँ $\lambda \in R^+$. $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बाह्य कोण का समद्विभाजक $\lambda(\hat{a}-\hat{b}), \lambda \in R^+$ होता है।

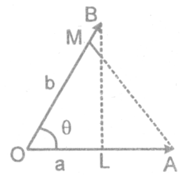
नोट : रेखाओं $\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$ और $\vec{r}=\vec{a}+\mu\vec{c}$ के बीच कोण समद्विभाजकों के समीकरण $\vec{r}=\vec{a}+t(\hat{b}+\hat{c})$ और $\vec{r}=\vec{a}+p(\hat{c}-\hat{b})$ होता है।

दो सदिशों का अदिष गुणन (Scalar product of two vectors) :

अदिष गुणन की ज्यामितिय व्याख्या :

माना $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो सदिष हैं जिन्हें क्रमषः $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ से निरूपित किया जाता है। मानाकि θ, $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ के मध्य कोण है। B एवं A से क्रमषः BL एवं AM इस प्रकार खींचते है कि $BL \perp OA$ और $AM \perp OB$.

त्रिभुजों OBL और OAM से, $OL=OB\cos\theta$ और $OM=OA\cos\theta$. यहाँ OL और OM क्रमषः $\vec{b}$ का $\vec{a}$ पर और $\vec{a}$ का $\vec{b}$ पर प्रक्षेप है।



अब $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$= |\vec{a}|(OB\cos\theta) = |\vec{a}|(OL)$

$= (\vec{a}$ का परिमाण$)(\vec{a}$ पर $\vec{b}$ का प्रक्षेप$)$ ....(i)

पुनः $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{b}|(|\vec{a}|\cos\theta)$

$= |\vec{b}|(OA\cos\theta) = |\vec{b}|(OM)$

$= (\vec{b}$ का परिमाण$)(\vec{a}$ का $\vec{b}$ पर प्रक्षेप$)$ ....(ii)

इस प्रकार ज्यामितिय व्याख्या से, यह स्पष्ट है कि दो सदिशों का अदिषगुणन इनमें से एक के मापांक और दूसरे सदिष का पहले की दिषा में प्रक्षेप के गुणनफल के बराबर है।

(i) $\hat{i}.\hat{i}=\hat{j}.\hat{j}=\hat{k}.\hat{k}=1;\ \hat{i}.\hat{j}=\hat{j}.\hat{k}=\hat{k}.\hat{i}=0$

(ii) $\vec{a}$ का $\vec{b}$ पर प्रक्षेप $=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}$

(iii) यदि $\vec{a}=a_1i+a_2j+a_3k$ और $\vec{b}=b_1i+b_2j+b_3k$, तो $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_2+a_2b_2+a_3b_3$

$|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}$

(iv) यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के मध्य कोण ϕ है तो $\cos\phi=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} 0\le\phi\le\pi$

(v) $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta (0\le\theta\le\pi)$

नोट : यदि θ न्यूकोण है, तो $\vec{a}.\vec{b}>0$ होगा और यदि θ अधिककोण है, तो $\vec{a}.\vec{b}<0$

(vi) $|\vec{a}\pm\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\pm 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$, जहाँ θ सदिषों के बीच कोण है।

(vii) $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2=\vec{a}^2$

(viii) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ (क्रम विनिमेय)

(ix) $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (बंटन)

(x) $\vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b} \quad (\vec{a}\ne 0 \vec{b}\ne 0)$

(xi) $(m\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.(m\vec{b}) = m(\vec{a}.\vec{b})$: (साहचर्य), जहाँ m अदिष है।

Note:

(a) $\vec{a}.\vec{b}$ का अधिकतम मान $= |\vec{a}||\vec{b}|$

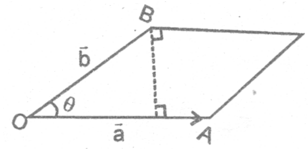
(b) $\vec{a}.\vec{b}$ का न्यूनतम मान $= -|\vec{a}||\vec{b}|$

(c) किसी अदिष $\vec{a}$ को $\vec{a} = (\vec{a}.\hat{i})\hat{i} + (\vec{a}.\hat{j})\hat{j} + (\vec{a}.\hat{k})\hat{k}$ के रूप में भी लिखा जा सकता है।

दो सदिषों का सदिष गुणन (Vector product of two vectors) :

(i) यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो सदिष हैं और θ उनके मध्य कोण है, तो $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ जहाँ $\hat{n}$ इकाई सदिष है जो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दोनों के इस प्रकार लम्बवत् है कि $\vec{a}, \vec{b}$ और $\hat{n}$ एक दक्षिणावर्ती पेंच (right handed screw system) निकाय बनाते हैं।

(ii) ज्यामिति से $|\vec{a}\times\vec{b}| =$ समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसकी आसन्न भुजाएँ क्रमषः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ से प्रदर्षित की जाती हैं।



(iii) $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{0};\ \hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}, \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}, \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$

(iv) यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ और $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ हो, तो $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & a_2 & b_3 \end{vmatrix}$

(v) $\vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{b}\times\vec{a}$ (क्रम विनिमेय नहीं हैं।)

(vi) $(m\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(m\vec{b}) = m(\vec{a}\times\vec{b})$ (साहचार्य) जहाँ m अदिष है।

(vii) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{c})$ (बंटन)

(viii) $\vec{a}\times\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\ \&\ \vec{b}$ समान्तर (संरेख) हैं $(\vec{a}\neq 0, \vec{b}\neq 0)$ अर्थात् $\vec{a} = K\vec{b}$, जहाँ K अदिष है।

(ix) सदिष $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के समतल के लम्बवत् इकाई सदिष $\hat{n} = \pm\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$

(x) $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के समतल के लम्बवत् और 'r' परिमाण का सदिष $= \pm\dfrac{r(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$

(xi) यदि θ, $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के मध्य कोण है, तो $\sin\theta = \dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

(xii) यदि $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ क्रमषः तीन बिन्दुओं A,B और C के स्थिति है, तो त्रिभुज ABC का सदिष क्षेत्रफल

$\frac{1}{2}\left[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right]$ होगा। बिन्दु A,B और C संरेख है यदि $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=0$

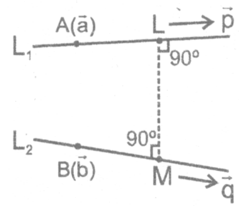
(xiii) किसी चतुर्भुज जिसके विकर्ण सदिष $\vec{d}_1$ और $\vec{d}_2$ है, का क्षेत्रफल $\frac{1}{2}\left|\vec{d}_1\times\vec{d}_2\right|$ होता है।

(xiv) **लग्रान्ज सर्वसमिका (Lagrange's Identity) : किन्हीं दो सदिषों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए**

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}.\vec{b})^2=\begin{vmatrix}\vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{b}\\ \vec{a}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{b}\end{vmatrix}$$

दो रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी (Shortest distance between two lines) :

यदि समष्टि में दो रेखाएँ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है, तो स्पष्टतया उनके मध्य न्यूनतम दूरी शून्य होती है। रेखाएँ जो न तो प्रतिच्छेद करती है और न ही समान्तर हो, **विषमतलीय रेखाएँ** (skew line) कहलाती है। विषमतलीय रेखाओं के लिए न्यूनतम दूरी की दिशा दोनों रेखाओं के लम्बवत् होगी।



मानाकि रेखाओं L_1 और L_2 के बीच न्यूनतम दूरी सदिष $\overrightarrow{LM}$ है, तो $\overrightarrow{LM}$ दोनों सदिषों $\vec{p}$ तथा $\vec{q}$ के लम्बवत् है। अर्थात् $\overrightarrow{LM}$ सदिष $\vec{p}\times\vec{q}$ के समान्तर है। अतः न्यूनतम दूरी सदिष का मापांक (अर्थात् $|\overrightarrow{LM}|$) , $\overrightarrow{AB}$ के न्यूनतम दूरी सदिष की दिशा के अनुदिष प्रक्षेप के बराबर होगा।

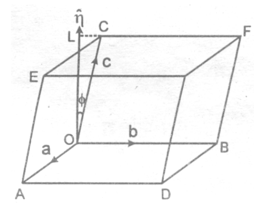
$$\therefore\quad |\overrightarrow{LM}| = \left|\overrightarrow{AB} \text{ का } \overrightarrow{LM} \text{ पर प्रक्षेप}\right| = \left|\overrightarrow{AB} \text{ का } \vec{p}\times\vec{q} \text{ पर प्रक्षेप}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{AB}.(\vec{p}\times\vec{q})}{\vec{p}\times\vec{q}}\right| = \left|\frac{(\vec{b}-\vec{a}).(\vec{p}\times\vec{q})}{|\vec{p}\times\vec{q}|}\right|$$

(i) $\vec{p}$ तथा $\vec{q}$ के अनुदिष दो रेखाएँ दो रेखा प्रतिच्छेद करेगी केवल यदि न्यूनतम दूरी =0
अर्थात् $(\vec{b}-\vec{a}).(\vec{p}\times\vec{q})=0$ अर्थात् $(\vec{b}-\vec{a})$, $\vec{p}$ एवं $\vec{q}$ को समाहित करने वाले समतल में स्थित होगा
$\Rightarrow\quad [(\vec{b}-\vec{a})\vec{p}\vec{q}]=0$

(ii) यदि दो समान्तर रेखाएँ $\vec{r}_1=\vec{a}_1+K\vec{b}$ तथा $\vec{r}_2=\vec{a}_2+K\vec{b}$ से दी जाए, तो इनके मध्य दूरी $d=\left|\frac{\vec{b}\times(\vec{a}_2-\vec{a}_1)}{|\vec{b}|}\right|$

अदिश त्रिक गुणन (Scalar triple product (S.T.P.)) :

(i) तीन सदिषों $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ का अदिष त्रिक गुणन $\vec{a}\times\vec{b}.\vec{c}=|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|\sin\theta\cos\phi$ से परिभाषित किया जाता है।
जहाँ θ, $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के मध्य कोण है (अर्थात् $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}=\theta$) और φ, $\vec{a}\times\vec{b}$ और $\vec{c}$ के मध्य कोण हैं।
(अर्थात् $(\vec{a}\times\vec{b})\,\hat{}\,\vec{c}=\phi$.) यह $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ के रूप में भी लिखा जाता है और इसे box product भी कहते हैं।



(ii) अदिष त्रिकगुणन एक समान्तर षट्फलक के आयतन को प्रदर्षित करता है,य जिसकी आसन्न कोरें $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ हो अर्थात् $V=[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$

(iii) अदिष त्रिक गुणन में बिन्दु (dot) और कॉस (cross) की स्थिति को आपस में बदला जा सकता हैं।
$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}$ OR $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}]=[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$

(iv) $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = -\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{b})$ i.e. $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = -[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}]$

(v) यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}; \vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ और $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ हो, तो $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

व्यापक रूप में यदि $\vec{a} = a_1\vec{\ell} + a_2\vec{m} + a_3\vec{n}; \vec{b} = b_1\vec{\ell} + b_2\vec{m} + b_3\vec{n}$ और $\vec{c} = c_1\vec{\ell} + c_2\vec{m} + c_3\vec{n}$

हो, तो $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} [\vec{\ell}\vec{m}\vec{n}]$, जहाँ $\vec{\ell}, \vec{m}$ और $\vec{n}$ असमतलीय सदिश है।

(vi) यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ समतलीय सदिष है $\Leftrightarrow$ $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0$.

(vii) तीन सदिषों का अदिष गुणन 0 होता है यदि उनमें से दो समान या समान्तर है अर्थात् $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0$

(viii) यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ असमतलीय हैं, तो दक्षिणावर्ती निकाय के लिए $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] > 0$ और वामावर्ती निकाय के लिए $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] < 0$

(xi) [i j k]=1 (x) $[K\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = K[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ (xi) $[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{d}] = [\vec{a}\vec{c}\vec{d}] + [\vec{b}\vec{c}\vec{d}]$

याद रखो कि $\left|\vec{a}-\vec{b}\quad \vec{b}-\vec{c}\quad \vec{c}-\vec{a}\right|$ और $\left|\vec{a}+\vec{b}\quad \vec{b}+\vec{c}\quad \vec{c}+\vec{a}\right| = 2\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$

चतुष्फलक और इसके गुणधर्म (Tetrahedron and its properties) :

(a) एक चतुष्फलक OABC का आयतन $V = \dfrac{1}{6}[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ द्वारा दिया जाता है जबकि O मूल बिन्दु है और A,B और C के स्थिति सदिष क्रमषः $\vec{a}, \vec{b}$ & $\vec{c}$ हैं

(b) एक चतुष्फलक के केन्द्रक का स्थिति सदिष $\dfrac{1}{4}[\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}]$ द्वारा दिया हैं जबकि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ एवं $\vec{d}$ इसके शीर्ष के स्थिति सदिष हैं।

नोट : एक चतुष्फलक के सम्मुख पृष्ठों के केन्द्रकों को सम्मुख शीर्षो से मिलाने वाली रेखाएँ जिस बिन्दु पर आपस में काटती है, वह चतुष्फलक का केन्द्रक होता है। यदि चतुष्फलक सम चतुष्फलक है, तो केन्द्रक शीर्ष और चारों पृष्ठों से बराबर दूरी पर होता है।

सदिष त्रिक गुणन (Vector triple product) :

यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन सदिष हैं, तब व्यंजक $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ एक सदिष होता हैं और इसे **सदिष त्रिक गुणन** कहते हैं।

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ **की ज्यामितिय व्याख्या** :

व्यंजक $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ जो कि एक सदिष वास्तवि में दो सदिषों $\vec{a}$ & $(\vec{b}\times\vec{c})$ का सदिष गुणन है। अतः $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ एक ऐसा सदिष है जो एक समतल के लम्बवत् है जिसमें सदिष $\vec{a}$ & $(\vec{b}\times\vec{c})$ स्थित है। लेकिन $\vec{b}\times\vec{c}$ सदिषों $\vec{b}$ & $\vec{c}$ को समाहित करने वाले समतल के लम्बवत् सदिष है अतः निष्कर्षतः यह कहा जा सकता है कि सदिष $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$. सदिष $\vec{a}$ के लम्बवत्

है तथा उस समतल में स्थित है जिसमें सदिष $\vec{b}\,\&\,\vec{c}$ स्थित है। अतः $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ को सदिष $\vec{b}\,\&\,\vec{c}$ के पदों में निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते है–

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = x\vec{b}+y\vec{c}$, जहाँ x और y कोई अदिष हैं।

- $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$
- $(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$
- व्यापक रूप में $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \neq \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

सदिषों का एकघात संचय (Linear comblnations) :

यदि सदिषों $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,......$ का एक परिमित समुच्च विद्यमान हो, तो सदिष $\vec{r} = x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}+....$ को किन्हीं $x,y,z...\in R$

के लिए सदिषों $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,......$ का एकघात संचय कहते है। हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होते हैं –

(a) यदि $\vec{a},\vec{b}$ कोई अषून्य, असंरेखीय सदिष हो, तो $x\vec{a}+y\vec{b} = x'\vec{a}+y'\vec{b} \Rightarrow x = x'; y = y'$

(b) **मूलभूत प्रमेय** : यदि $\vec{a},\vec{b}$ कोई अषून्य, असरंखीय सदिष हो, तो इनके समतलीय किसी सदिष $\vec{r}$ को सदिषों $\vec{a},\vec{b}$ के एकघात संचय के रूप में अद्वितीय रूप से प्रदर्षित किया जा सकता है।
अर्थात् अद्वितीय रूप से $x,y\in R$ इस प्रकार विद्यमान होगें कि $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{r}$

(c) यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ अषून्य, असमतलीय सदिष हो, तो
$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c} = x'\vec{a}+y'\vec{b}+z'\vec{c} \Rightarrow x = x', y = y', z = z'$

(d) **समष्टि में मूलभूत प्रमेय** : माना तीन अषून्य, असमतलीय सदिष $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ समष्टि में विद्यमान है तो किसी सदिष $\vec{r}$ को सदिषों $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ के एक घात संचय के रूप में अद्वितीय रूप से व्यक्त किया जा सकता है। अर्थात् अद्वितीय रूप से $x,y,z\in R$ इस प्रकार विद्यमान होगें कि $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{r}$

(e) यदि $\vec{x}_1,\vec{x}_2,.......\vec{x}_n$,n अषून्य सदिष हो और $k_1,k_2,.....k_n$, n अदिष राषियाँ हो, और एकघात संचय $k_1\vec{x}_1+k_2\vec{x}_2+.......k_n\vec{x}_n = 0 \Rightarrow k_1=0,\ k_2=0......k_n=0$, तो सदिष $\vec{x}_1,\vec{x}_2,.......\vec{x}_n$ **एकघाततः स्वतन्त्र सदिष** (linearly independent vectors) कहलाते है।

(f) यदि $\vec{x}_1,\vec{x}_2,.......\vec{x}_n$ एकघाततः स्वतन्त्र नहीं हो, तो इन्हें एकघाततः आश्रित सदिष (linearly dependent vectors) कहते है, अर्थात् यदि $k_1\vec{x}_1+k_2\vec{x}_2+.......+k_n\vec{x}_n = 0$ और कम से कम एक k_r इस प्रकार विद्यमान हो कि $k_r\neq0$, तो सदिष $\vec{x}_1,\vec{x}_2,.......\vec{x}_n$ एकघाततः आश्रित सदिष कहलाते हैं।

Note 1 : यदि $k_r\neq0$; $k_1\vec{x}_1+k_2\vec{x}_2+k_3\vec{x}_3+.......+k_r\vec{x}_r+......+k_n\vec{x}_n = 0$

$$\Rightarrow -k_r\vec{x}_r = k_1\vec{x}_1+k_2\vec{x}_2+.......+k_{r-1}.\vec{x}_{r-1}+k_{r+1}.\vec{x}_{r+1}+......+k_n\vec{x}_n$$

$$\Rightarrow -k_r\frac{1}{k_r}\vec{x}_r = k_1\frac{1}{k_r}\vec{x}_1+k_2\frac{1}{k_r}\vec{x}_2+.......+k_{r-1}.\frac{1}{k_r}\vec{x}_{r-1}+......+k_n\frac{1}{k_r}\vec{x}_n$$

$\Rightarrow \vec{x}_r = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + ... + c_{r-1}\vec{x}_{r-1} + c_r\vec{x}_{r-1} + ... + c_n\vec{x}_n$

अर्थात् सदिष $\vec{x}_r$ को सदिषों $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ...\vec{x}_{r-1}, \vec{x}_{r+1}, ...\vec{x}_n$ के एकघात संचय के रूप में प्रदर्षित कर सकते है।

अतः सदिष $\vec{x}_r$ सदिषों $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ...\vec{x}_{r-1}, \vec{x}_{r+1}, ...\vec{x}_n$ के साथ सदिषों का एकघाततः आश्रित समुच्चय बनाता है।

नोट 2:

☞ यदि $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$ हो, तो सदिष $\vec{a}$ को सदिषों $\hat{i}, \hat{j}$ एवं $\hat{k}$ के एकघात संचय के रूप में व्यक्त करते है अेर $\vec{a}, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ सदिषों का एकघाततः आश्रित समुच्चय बनाते हैं। व्यापक रूप में, त्रिविम समष्टि में चार सदिषों का प्रत्येक समुच्चय एक एकघाततः आश्रित निकाय बनाता है।

☞ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ सदिषों का एकघाततः स्वतंत्र समुच्चय कहलाता है।
$K_1\hat{i} + K_2\hat{j} + K_3\hat{k} = 0 \Rightarrow K_1 = K_2 = K_3 = 0$

☞ दो सदिषों $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ का एकघाततः आश्रित होना दर्षाता है कि $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ परस्पर समान्तर है अर्थात् $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ सदिषों $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ का एकघाततः आश्रित होना दर्षाता है। इसके विपरीत $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$ होना, सदिषों $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ का एकघाततः स्वंतत्र होना दर्षाता है।

☞ यदि तीन सदिष $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ एकघाततः आश्रित हो, तो वे परस्पर समतलीय होते है अर्थात् $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]=0$ इसके विपरीत यदि $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0$ हो, तो सदिष एकघाततः स्वतंत्र सदिष कहलाते हैं।

सदिशों का व्युत्क्रम निकाय (Reciprocal system of vectors) :

यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ और $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ असमतलीय सदिषों के दो समुच्चय इस प्रकार है कि $\vec{a}.\vec{a}' = \vec{b}.\vec{b}' = \vec{c}.\vec{c}' = 1$, तो दोनों निकाय सदिषों के व्युत्क्रम निकाय कहलाते हैं।

नोट : $\vec{a}' = \dfrac{\vec{b} \times \vec{c}}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}, \vec{b}' = \dfrac{\vec{c} \times \vec{a}}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}$ and $\vec{c}' = \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}$

समतल का समीकरण (Equation of a plane) :

(i) समीकरण $(\vec{r} - \vec{r}_0).\vec{n} = 0$ एक समतल को निरूपित करती है जो एक बिन्दु को समाहित करता है जिसका स्थिति सदिष $\vec{r}_0$ है, जहाँ $\vec{n}$ समतल के लम्बवत् एक सदिष है।
इस समीकरण को $\vec{r}.\vec{n} = d$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाॅं $d = \vec{r}_0.\vec{n}$

(ii) दो समतलों के बीच कोण समतलों के दो अभिलम्बों के बीच कोण होता है और एक रेखा और एक समतल के बीच कोण, रेखा और समतल के अभिलम्ब के बीच कोण का पूरक कोण (complimentry angle) होता है।

(iii) एक बिन्दु जिसका स्थिति $\vec{a}$ है, से समतल $\vec{r}.\vec{n} = d$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई $p = \dfrac{|\vec{a}.\vec{n} - d|}{|\vec{n}|}$

(iv) यदि $(\vec{r} - \vec{a}).\vec{n}_1 = 0$ और $(\vec{r} - \vec{a}).\vec{n}_2 = 0$ दो समतलों की समीकरणें है,य तो इनकी प्रतिच्छेन रेखा का समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2)$ से दिया जाता है।

सरंखीय होने के लिए जाँच (Test of collinearity) :

तीन बिन्दु A,B,C जिनके स्थिति सदिष क्रमषः $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ है, संरेखीय होगें यदि और केवल यदि तीन अदिष x,y,z इस प्रकार विद्यमान हो कि सभी एक साथ शून्य नहीं हो और $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0$ हो, जहाँ $x+y+z=0$

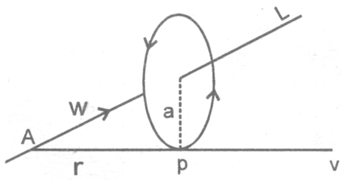
समतलीय होने के लिए जाँच (Test of coplanarity) :

चार बिन्दु A,B,C,D जिनके स्थिति सदिष क्रमषः $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ हैं, समतलीय होगें यदि और केवल यदि चार अदिष x,y,z,w इस प्रकार विद्यमान हो कि सभी एक साथ शून्य नहीं हो और $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} + w\vec{d} = 0$ हो, जहाँ $x+y+z+w=0$

सदिषों के अनुप्रयोग (Application of vectors) :

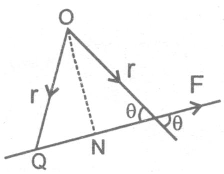
(a) एक स्थिर बल $\vec{F}$ द्वारा विस्थापन $\vec{s}$ देने के लिये, बल $\vec{F}$ के विरूद्ध किया गया कार्य $\vec{W} = \vec{F}.\vec{s}$

(b) एक वृत्तीय पथ पर गतिषील पिण्ड का स्पर्ष रेखीय वेग $\vec{V} = \vec{w} \times \vec{r}$ द्वारा दिया जाता है जबकि $\vec{r}$, बिन्दु P का स्थिति सदिष है।



(c) बिन्दु O के सापेक्ष बल $\vec{F}$ का आघूर्ण $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ द्वारा दिया जाता है जबकि $\vec{r}$, बिन्दु P का बिन्दु 'O' के सापेक्ष स्थिति सदिष है। आघूर्ण $\vec{M}$ की दिषा समतल OPN के लम्बवत् इस प्रकार होती है कि $\vec{r}, \vec{F}$ एवं $\vec{M}$ एक दायें हाथ का निकाय (Right handed system) बनाते है।

(d) बल युग्म का आघूर्ण $= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}$ द्वारा दिया जाता है। जहाँ $\vec{r}_1$ एवं $\vec{r}_2$ क्रमषः उन बिन्दुओं के स्थिति सदिष है जिन पर बल $\vec{F}$ एवं $-\vec{F}$ आरोपित है।



Exercise -1

1-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. यदि सदिश $\vec{b}$ सदिश $\vec{a} = \left[2\sqrt{2}, -1, 4\right]$ के साथ संरेखीय है और $|\vec{b}| = 10$ हो, तो

(A) $\vec{a} \pm \vec{b} = 0$ (B) $\vec{a} \pm 2\vec{b} = 0$ (C) $2\vec{a} \pm \vec{b} = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं

2. xy समतल में OABCDE एक समषट्भुज हैं जिसकी भुजा 2 इकाई है। O मूलबिन्दु है और OA, x-अक्ष के अनुदिष है। षट्भुज के केन्द्र से गुजरने वाली और z-अक्ष के समान्तर रेखा पर O से 3 इकाई दूरी एक बिन्दु P लिया जाता है, तो सदिष $\overrightarrow{AP}$ है –

(A) $-\hat{i} + 3\hat{j} + \sqrt{5}\hat{k}$ (B) $\hat{i} + \sqrt{3}\hat{j} + 5\hat{k}$ (C) $-\hat{i} + \sqrt{3}\hat{j} + \sqrt{5}\hat{k}$ (D) $\hat{i} + \sqrt{3}\hat{j} + \sqrt{5}\hat{k}$

3. A (1, 1, 2),B(4, 3, 1) और C(2, 3, 5) हैं, तो कोण A के अन्तः समद्विभाजक को निरूपित करने वाला सदिष है –

(A) $\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ (B) $2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ (C) $2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ (D) $2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

4. मानाकि $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j}$ और $\vec{b} = 2\vec{i} - \hat{k}$ है, रेखाओं $\vec{r} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a}$ और $\vec{r} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}$ का प्रतिच्छेद बिन्दु है –

(A) $-\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ (B) $3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ (C) $3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ (D) $\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$

5. यदि $|\vec{a}| = 5, |\vec{a} - \vec{b}| = 8$ और $|\vec{a} + \vec{b}| = 10$ हो, तो $|\vec{b}| =$

(A) 1 (B) $\sqrt{57}$ (C) 3 (D) इनमें से कोई नहीं

6. उस समान्तर चतुर्भुज के विकर्णो के बीच का कोण जिसकी भुजायें सदिषों $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ से व्यक्त की जाती हैं, है

(A) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (B) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (C) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{9}\right)$ (D) $\cos^{-1}\left(\frac{5}{9}\right)$

7. एक समतल में चार बिन्दु A, B, C और D हैं जिनके स्थिति सदिष क्रमषः $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ एवं $\vec{d}$ जबकि $(\vec{a} - \vec{d}).(\vec{b} - \vec{c}) = (\vec{b} - \vec{d}).(\vec{c} - \vec{a}) = 0$ हो, तो त्रिभुज ABC के लिए D है –

(A) अन्तः केन्द्र (B) परिकेन्द्र (C) लम्बकेन्द्र (D) केन्द्रक

8. सदिष $\vec{a} \& \vec{b}$ के मध्य कोण $\theta = \frac{2\pi}{3}$ है। यदि $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$ हो, तो $\left\{(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b})\right\}^2 =$

(A) 225 (B) 250 (C) 275 (D) 300

9. त्रिभुज ABC के शीर्षो A, B, C के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ है, तो त्रिभुज के समतल के लम्बवत् इकाई सदिश है –

(A) $\frac{(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})}{\Delta}$ (B) $\frac{(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})}{2\Delta}$

(C) $\frac{(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})}{4\Delta}$ (D) इनमें से कोई नहीं

जहाँ Δ त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल है।

10. $\left|(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}),(\vec{a}-\vec{b}),(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})\right|$ का मान निम्न में से किस बक्सा गुणनफल (box product) के बराबर है –

(A) $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$ (B) $2[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$ (C) $3[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$ (D) $4[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$

11. यदि $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{c}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ हो, तो $\begin{vmatrix}\vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{b} & \vec{a}.\vec{c}\\ \vec{b}.\vec{a} & \vec{b}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{c}\\ \vec{c}.\vec{a} & \vec{c}.\vec{b} & \vec{c}.\vec{c}\end{vmatrix}$ का मान हैं –

(A) 2 (B) 4 (C) 16 (D) 64

12. यदि $\vec{b}$ और $\vec{c}$ दो असरंखीय सदिष इस प्रकार है कि $\vec{a}\,||\,(\vec{b}\times\vec{c})$, तो $(\vec{a}\times\vec{b}).\,(\vec{a}\times\vec{c})=$

(A) $\vec{a}^2(\vec{b}.\vec{c})$ (B) $\vec{b}^2(\vec{a}.\vec{c})$ (C) $\vec{c}^2(\vec{a}.\vec{b})$ (D) इनमें से कोई नहीं

13. माना $\vec{a}=xi+12j-k; \vec{b}=2i+xj+k$ और $\vec{c}=i+k$ हैं। यदि क्रम समुच्चय (ordered set) $[\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}]$ वामावर्ती (left handed) है, तो

(A) $x\in(2,\infty)$ (B) $x\in(-\infty,-3)$ (C) $x\in$ (1==3, 2) (D) $x\in\{-3, 2\}$

14. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ तीन इकाई सदिष इस प्रकार है कि $\vec{b},\vec{c}$ के समान्तर नहीं है और $\vec{a}\times(2\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}$ हो, तो $\vec{a}$ द्वारा $\vec{b}$ और $\vec{c}$ के साथ बनाये कोण क्रमषः है –

(A) $\frac{\pi}{3}$ & $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ & $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ & $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$ & $\frac{\pi}{3}$

15. सदिषों $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ और $2\hat{i}-3\hat{j}$ समतल में स्थित और सदिष $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ के लम्बवत् सदिष जिसकी लम्बाई 3 मात्रक है, होगा

(A) $\frac{3}{\sqrt{6}}(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ (B) $\frac{3}{\sqrt{6}}(2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})$ (C) $\frac{3}{\sqrt{114}}(8\hat{i}-7\hat{j}-\hat{k})$ (D) $\frac{3}{\sqrt{114}}(-7\hat{i}-8\hat{j}-\hat{k})$

16. सम्बंधों $\vec{A}.\vec{x}=c$ और $\vec{A}\times\vec{x}=\vec{B}$ को संतुष्ट करने वाला सदिष $\vec{x}$ है

(A) $\frac{c\vec{A}-(\vec{A}\times\vec{B})}{|\vec{A}|}$ (B) $\frac{c\vec{A}-(\vec{A}\times\vec{B})}{|\vec{A}|^2}$ (C) $\frac{c\vec{A}+(\vec{A}\times\vec{B})}{|\vec{A}|}$ (D) $\frac{c\vec{A}-2(\vec{A}\times\vec{B})}{|\vec{A}|^2}$

17. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ रेखीय रूप से स्वतंत्र सदिष हैं, तो निम्न में से सदिषों का कौनसा समुच्चय रेखीय रूप से परंतत्र है –
(A) $\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}$ (B) $\vec{a}+=-\vec{b},\vec{b}-\vec{c},\vec{c}-\vec{a}$ (C) $\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}$ (D) इनमें से कोई नहीं

18. यदि रेखा $\vec{r}=(\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k})+\lambda(2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$ समतल $\vec{r}.(3\hat{i}-2\hat{j}-m\hat{k})=14$ के समान्तर है, तो m का मान है –
(A) 2 (B) –2
(C) 0 (D) इन सूचनाओं के आधार पर मान ज्ञात नहीं किया जा सकता

– –

एक से अधिक विकल्प सही

19. यदि एक रेखा का सदिष समीकरण $\vec{r}=2\hat{i}+6\hat{j}+\lambda(\hat{i}-3\hat{j})$ है, तो निम्न में से कौनसा कथन सत्य है ?
(A) रेखा, $2\hat{i}+6\hat{j}$ के समान्तर है। (B) रेखा, बिन्दु $3\hat{i}+3\hat{j}$ से गुजरती है।
(C) रेखा, बिन्दु $\hat{i}+9\hat{j}$ से गुजरती है। (D) रेखा, XY-समतल के समान्तर है।

20. सदिष $\frac{1}{3}(2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$
(A) एक इकाई सदिष है। (B) सदिष $2\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k}$ के साथ $\frac{\pi}{3}$ कोण बनाता है।
(C) सदिष $-\hat{i}+\hat{j}-\frac{1}{2}\hat{k}$ के समान्तर है। (D) सदिष $3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ के लम्बवत् है।

21. एक सदिष $\vec{c}$ की दिषा सदिषों $\vec{a}=7\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ और $\vec{b}=-2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ के अन्तः कोण समद्विभाजक के अनुदिष है और $|\vec{c}|=5\sqrt{6}$ है तो $\vec{c}$ है –
(A) $\frac{5}{3}(\hat{i}-7\hat{j}+2\hat{k})$ (B) $\frac{5}{3}(\hat{i}+7\hat{j}-2\hat{k})$ (C) $\frac{5}{3}(-\hat{i}+7\hat{j}-2\hat{k})$ (D) $\frac{5}{3}(-\hat{i}-7\hat{j}+2\hat{k})$

22. यदि $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$ और $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$ हो, तो सदिष $\vec{a}-\vec{d}$ और $\vec{b}-\vec{c}$ हैं–
(A) संरेखीय (B) रेखीय रूप से स्वतंत्र
(C) लम्बवत् (D) समान्तर

23. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ व $\vec{d}$ रेखीय रूप से स्वतंत्र सदिषों का समुच्चय हैं और $K_1\vec{a}+K_2\vec{b}+K_3\vec{c}+K_4\vec{d}=0$ हो, तो –
(A) $K_1+K_2+K_3+K_4=0$ (B) $K_1+K_3+K_2+K_4=0$
(C) $K_1+K_4+K_2+K_3=0$ (D) इनमें से कोई नहीं

24. $\hat{a}$ एवं $\hat{b}$ दो इकाई सदिष हैं जिनके मध्य कोण समकोण है। $\hat{a},\hat{b}$ और $\hat{a}\times\hat{b}$ के साथ समान कोण बनाने वाला इकाई सदिष हैं–
(A) $-\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{a}+\hat{b}+\hat{a}\times\hat{b})$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{a}+\hat{b}+\hat{a}\times\hat{b})$

(C) $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{a}+\hat{b}-\hat{a}\times\hat{b}\right)$ (D) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{a}+\hat{b}-\hat{a}\times\hat{b}\right)$

1-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. दो बिन्दुओं A और B के स्थिति सदिश $6\vec{a}+2\vec{b}$ और $\vec{a}-3\vec{b}$ है। यदि एक बिन्दु C,AB को 3 : 2 में विभाजित करता है, तो प्रदर्षित कीजिए कि C का स्थिति सदिश $3\vec{a}-\vec{b}$ है।

2. एक त्रिभुज OAB में E भुजा OB का मध्य बिन्दु है और AB पर एक बिन्दु D इस प्रकार है कि AD : BD=2 :1 यदि OD और AE बिन्दु P पर मिलती है, तो सदिष विधि का प्रयोग करते हुए OP : PD ज्ञात कीजिए।

3. यदि ABCD एक चतुर्भुज है, E और F क्रमषः AC तथा BD के मध्य बिन्दु है,य तो प्रदर्षित कीजिए कि $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{4EF}$

4. यदि $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ और $\vec{r}=(i+2\hat{j}+3\hat{k})+\mu(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$ दो रेखाएँ हैं, तो दोनों रेखाओं के न्यूनकोण समद्विभाजक का समीकरण ज्ञात कीजिए।

5. यदि एक समान्तर चतुर्भुज के तीन क्रमागत शीर्षो के स्थिति सदिष A (–3, –2, 0); B (3, –3, 1) और C (5, 0, 2) हैं, तो ज्ञात कीजिए –

   (i) चतुर्थ शीर्ष D की स्थिति सदिष

   (ii) एकसदिष जिसकी दिषा $\overrightarrow{AB}$ के समान है लेकिन मापांक $\overrightarrow{AC}$ के बराबर है।

   (iii) $\overrightarrow{AC}$ और $\overrightarrow{BD}$ के बीच कोण

6. (i) यदि $\vec{e}_1$ और $\vec{e}_2$ दो इकाई सदिष इस प्रकार है कि $\vec{e}_1-\vec{e}_2$ भी एक इकाई सदिष है, तो $\vec{e}_1$ और $\vec{e}_2$ के मध्य कोण θ ज्ञात कीजिए।

   (ii) सिद्ध कीजिए : $\left(\frac{\vec{a}}{\vec{a}^2}-\frac{\vec{b}}{\vec{b}^2}\right)^2=\left(\frac{\vec{a}-\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2$

7. (i) एक सदिष $\vec{c}$ सदिषों $2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ एवं $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ के लम्बवत् है और $\vec{c}.\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)+6=0$ को संतुष्ट करता है। सदिष $\vec{c}$ को ज्ञात कीजिए।

   (ii) दिया गया है $|\vec{a}|=10,\left|\vec{b}\right|=2$ और $\vec{a}.\vec{b}=12,\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ ज्ञात कीजिए।

8. (i) प्रदर्षित कीजिए कि $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ को मिलाने वाली रेखा से बिन्दु $\vec{c}$ की लम्बवत् दूरी

$$\frac{\left|\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}\right|}{\left|\vec{b}-\vec{a}\right|}$$ है।

(ii) एक समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल 12 वर्ग इकाई दिया गया है। भुजा BC के मध्य बिन्दु M और शीर्ष A से एक सरल रेखा खीचीं गई है जो विकर्ण BD को बिन्दु 'O' पर काटती है। चतुर्भुज OMCD का क्षेत्रफल सदिष विधि की सहायता से ज्ञात कीजिए।

9. रेखाओं $\vec{r} = (4\hat{i} - \hat{j}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$ और $\vec{r} = (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k})$ के बीच न्यूनकोण दूरी ज्ञात कीजिए।

10. (i) इकाई सदिष $\hat{m}, \hat{n}$ एवं $\hat{p}$ इस प्रकार है कि $(\hat{m}\wedge\hat{n}) = \hat{p}\wedge(\hat{m}\times\hat{n}) = a$, तो $[\hat{n}\hat{p}\hat{m}]$ का मान a के पदों में ज्ञात कीजिए।

(ii) मानाकि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन इकाई सदिष है और $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c} = 0$ यदि $\vec{b}$ और $\vec{c}$ के बीच कोण $\frac{\pi}{3}$ है, तो $|[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]|$ का मान ज्ञात कीजिए।

11. एक चतुष्फलक के चार शीर्षो के स्थिति सदिष $A(\hat{j} + 2\hat{k})$, $B(3\hat{i} + \hat{k})$, $C(4\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ और $D(2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$ हैं। तो ज्ञात कीजिए –

(i) चतुष्फलक ABCD का आयतन

(ii) रेखाओं AB और CD के बीच न्यूनकोण दूरी।

12. मानाकि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{c} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{d} = 3\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ है, तो

(i) यदि $\vec{a}\,x(\vec{b}\,x\,\vec{c}) = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ हो, तो p,q और r के मान ज्ञात कीजिए।

(ii) $(\vec{a}\,x\,\vec{b})\,x\,(\vec{a}\,x\,\vec{c}).\vec{d}$ का मान ज्ञात कीजिए।

13. दिया गया है कि $\vec{x} + \frac{1}{\vec{p}^2}(\vec{p}.\vec{x})\vec{p} = \vec{q}$, तो प्रदर्षित कीजिए कि $\vec{p}.\vec{x} + \frac{1}{2}(\vec{p}.\vec{q})$ और $\vec{x}$ के मान को $\vec{p}$ और $\vec{q}$ के पदों में ज्ञात कीजिए।

14. क्या निम्नलिखित सदिषों के समुच्चय एकघाततः स्वतंत्र है ?

(i) $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 9\hat{k}$

(ii) $\vec{a} = -2\hat{i} - 4\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{c} = \hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$

15. यह दिया गया है कि : $\vec{x} = \frac{\vec{b}\times\vec{c}}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}$; $\vec{y} = \frac{\vec{c}\times\vec{a}}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}$; $\vec{z} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}$ जहाँ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ असमतलीय सदिष है। प्रदर्षित कीजिए कि $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ भी असमतलीय निकाय बनाते हैं और $\vec{x}.(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{y}.(\vec{b} + \vec{c}) + \vec{z}.(\vec{c} + \vec{a})$ का मान ज्ञात कीजिए।

16. मूलबिन्दु से एक समतल पर डाले गये लम्ब का पाद (4,-2,-5) है, तो समतल का सदिष समीकरण ज्ञात कीजिए।

17. समान्तर समतलों $\vec{r}.(2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k})=5$ और $\vec{r}.(6\hat{i}-9\hat{j}+18\hat{k})+20=0$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

Exercise – 2

2-A(बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. मानाकि सदिषों $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ की लम्बाई क्रमषः 3,4,5 हैं। माना $\vec{a},\vec{b}+\vec{c}$ के एवं $\vec{b},\vec{c}+\vec{a}$ के और $\vec{c},\vec{a}+\vec{b}$ के लम्बवत् है, तो $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$ का मान है –

(A) $2\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $10\sqrt{5}$ (D) $5\sqrt{2}$

2. दिया गया है कि $\vec{a}=x\hat{i}+y\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{c}=\hat{i}+2\hat{j}$; $(\vec{a}\hat{\ }\vec{b})=\frac{\pi}{2}$, $\vec{a}.\vec{c}=4$ तो

(A) $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]^2=|\vec{a}|$ (B) $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=|\vec{a}|$ (C) $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=0$ (D) $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=|\vec{a}|^2$

3. सदिष $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$; $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ और $3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ इस प्रकार है कि एक सदिष का अन्तिम बिन्दु दूसरे सदिष का प्रारम्भिक बिन्दु हैं, तो सदिष हैं –

(A) असमतलीय (B) समतलीय पर त्रिभुज नहीं बना सकते है।

(C) समतलीय लेकिन एक त्रिभुज बना सकते है। (D) समतलीय और एक समकोण त्रिभुज बना सकते हैं।

4. एक बिन्दु O पर चार समतलीय बल लगाये गए है। इनमें से प्रत्येक k के बराबर है और दो क्रमागत बलों के मध्य कोण 45^0 है, तो परिणामी बल का परिमाण है –

(A) $k\sqrt{2+2\sqrt{2}}$ (B) $k\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ (C) $k\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ (D) इनमें से कोई नहीं

5. $(\vec{d}+\vec{a}).\left(\vec{a}\times(\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d}))\right)=$

(A) $(\vec{b}.\vec{d})[\vec{a}\vec{c}\vec{d}]$ (B) $(\vec{b}.\vec{c})[\vec{a}\vec{b}\vec{d}]$ (C) $(\vec{b}.\vec{a})[\vec{a}\vec{b}\vec{d}]$ (D) इनमें से कोई नहीं

6. मानाकि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ के लम्बवत् एक सदिष $\vec{r}$ है, जहाँ $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=2$ यदि $\vec{r}=\ell(\vec{b}\times\vec{c})+m(\vec{c}\times\vec{a})+n(\vec{a}\times\vec{b})$ हो, तो $(\ell+m+n)=$

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) इनमें से कोई नहीं

7. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ तीन असमतलीय, अषून्य सदिष हैं और समष्टि में कोई सदिष $\vec{r}$ है, तो $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{r}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{r}\times\vec{a})+(\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{r}\times\vec{b})=$

(A) $2[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{r}$ (B) $3[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{r}$ (C) $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{r}$ (D) इनमें से कोई नहीं

8. एक चतुष्फलक के शीर्ष A(2,3,1),B(4,1,-2),C(6,3,7) और D(-5,-4,8) हैं। शीर्ष D से खींचे गये शीर्षभिलम्ब की लम्बाई हैं –

(A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) इनमें से कोई नहीं

9. यदि a,b,c एक हरात्मक श्रेढ़ी के pवें, qवें पद हैं और $\vec{u}=(q-r)\vec{i}+(r-p)\vec{j}+(p-q)\vec{k}$, $\vec{\upsilon}=\frac{\vec{i}}{a}+\frac{\vec{j}}{b}+\frac{\vec{k}}{c}$ हो, तो

(A) $\vec{u},\vec{\upsilon}$ समान्तर सदिष हैं। (B) $\vec{u},\vec{\upsilon}$ लम्बवत् सदिष है।

(C) $\vec{u}.\vec{\upsilon}=1$ (D) $\vec{u}\times\vec{\upsilon}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

10. किसी अषून्य सदिष $\vec{A}$ के लिए यदि समीकरणें $\vec{A}.\vec{B}=\vec{A}.\vec{C}$ और $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{A}\times\vec{C}$ सत्य है, तो

(A) $\vec{A},\vec{B}-\vec{C}$ के लम्बवत है। (B) $\vec{A}=\vec{B}$ (C) $\vec{B}=\vec{C}$ (D) $\vec{C}=\vec{A}$

11. यदि इकाई सदिषों $\vec{e}_1$ और $\vec{e}_2$ के बीच कोण 2θ है और $|\vec{e}_1-\vec{e}_2|<1$, तो $\theta\in[0,\pi]$ के लिए θ निम्न में से किस अन्तराल में हो सकता है –

(A) $\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$ (B) $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ (C) $\left(\frac{5\pi}{6},\pi\right]$ (D) $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$

12. एक सदिष $\vec{a}$ के कार्तीय निर्देषांक निकाय के सापेक्ष घटक 2p एवं 1 हैं। निकाय को मूलबिन्दु के सापेा वामावर्त दिषा में एक निष्चित कोण में घुमाया जाता है। यदि नये निकाय के सापेक्ष सदिष $\vec{a}$ के घटक p+1 एवं 1 हैं, तो

(A) p=0 (B) p=1 या $p=-\frac{1}{3}$ (C) p=-1 या $p=\frac{1}{3}$ (D) p=1 या p=-1

13. एक त्रिभुज ABC की भुजा $\overrightarrow{AC}$ पर एक बिन्दु M इस प्रकार लिया जाता है कि $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ भुजा $\overrightarrow{CB}$ पर एक बिन्दु N इस प्रकार लिया जाता है कि $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{CB}$, तो $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{MN}$ के प्रतिच्छेद बिन्दु X के लिए निम्न में से कौनसा कथन सत्य है ?

(A) $\overrightarrow{XB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ (B) $\overrightarrow{AX}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ (C) $\overrightarrow{XN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$ (D) $\overrightarrow{XM}=3\overrightarrow{XN}$

14. मानाकि $\vec{b}=4\hat{i}+3\hat{j}$ है और $\vec{b}$ के लम्बवत् एक सदिष $\vec{c}$ है एवं यह XY-समतल में स्थित है। XY-समतल में एक सिदष जिसके $\vec{b}$ के अनुदिष प्रक्षेप 1 और 2 हैं, है –

(A) $2\hat{i}-\hat{j}$ (B) $\hat{i}-2\hat{j}$ (C) $\frac{1}{5}(-2\hat{i}+11\hat{j})$ (D) इनमें से कोई नहीं

15. दिये गये आयतीय समान्तर षट्फलक के पृष्ठों के विकर्णो से निर्मित समान्तर षट्फलक का आयतन दिये गये समान्तर षट्फलक के आयतन का m गुना है, तो m=

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) इनमें से कोई नहीं

16. यदि $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{b}\times\vec{d}=0$ और $\vec{c}.\vec{d}=0$ हो, तो $\dfrac{\vec{d}\times(\vec{a}\times\vec{d})}{\vec{d}^2}=$

(A) $\vec{a}$ (B) $\vec{b}$ (C) $\vec{c}$ (D) $\vec{d}$

17. एक चतुष्फलक के पृष्ठ f_1,f_2,f_3,f_4 हैं। माना $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ सदिष हैं जिनके परिमाण क्रमषः f_1,f_2,f_3,f_4 के क्षेत्रफलों के बराबर हैं और जिनकी दिषा इन पृष्ठों के लम्बवत् बाहर की ओर है, तो

(A) $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\vec{a}_4=0$ (B) $\vec{a}_1+\vec{a}_3=\vec{a}_2+\vec{a}_4$

(C) $\vec{a}_1+\vec{a}_2=\vec{a}_3+\vec{a}_4$ (D) इनमें से कोई नहीं

18. कए समद्विबाहु त्रिभुज ABC में $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=8$ है और एक बिन्दु E,AB को 1:3 के अनुपत में अन्तः विभाजित करता है, तो $\overrightarrow{CE}$ & $\overrightarrow{CA}$ के मध्य कोण की कोःया का मान है– (जहॅा $\left|\overrightarrow{CA}\right|=12$)

(A) $-\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$ (B) $\dfrac{3\sqrt{8}}{17}$ (C) $\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$ (D) $\dfrac{-3\sqrt{8}}{17}$

19. एक स्थिर समतल OAB में एक अचर सदिष $\overrightarrow{OA}$ का एक चर सदिष $\overrightarrow{OB}$ के साथ सदिष गुणन एक अचर सदिष है, तो B का बिन्दुपथ है –

(A) $\overrightarrow{OA}$ के लम्बवत् एक सरल रेखा (B) एक वृत्त जिसका केन्द्र O और त्रिज्या $|\overrightarrow{OA}|$ है।

(C) $\overrightarrow{OA}$ के समान्तर एक सरल रेखा (D) इनमें से कोई नहीं

20. एक त्रिभुज की दो भुजाएँ सदिषों $\sqrt{3}(\hat{a}\times\hat{b})$ और $\vec{b}-(\hat{a}.\vec{b})\hat{a}$ से निरूपित होती है, जहाँ $\vec{b}$ अषून्य सदिष है और $\hat{a}$ $\vec{a}$ की दिषा में इकाई सदिष है, तो त्रिभुज के कोण हैं–

(A) $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right);\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right);\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{1-2\sqrt{3}}\right)$

(B) $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right);\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right);\cot^{-1}(0)$

(C) $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right);\tan^{-1}(2);\ \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-1}\right)$

(D) $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right);\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\right);\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}+3}{3\sqrt{2}-1}\right)$

21. माना $\vec{a},\vec{b}$ और $\vec{c}$ असमतलीय इकाई सदिष हैं और प्रत्येक एक दूसरे के साथ समान कोण θ बनाते है, तो $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ का मान θ के पदों में है –

(A) $(1+\cos\theta)\sqrt{\cos 2\theta}$ (B) $(1+\cos\theta)\sqrt{1-2\cos 2\theta}$

(C) $(1-\cos\theta)\sqrt{1+2\cos\theta}$ (D) इनमें से कोई नहीं

- -

इनमें से अधिक विकल्प सही

22. यदि a, b, c भिन्न वास्तविक संख्याएँ हैं और $a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}; b\hat{i}+c\hat{j}+a\hat{k}$ और $c\hat{i}+a\hat{j}+b\hat{k}$ तीन असंरेखीय बिन्दुओं A,B और C के स्थिति सदिष हैं, तो

(A) त्रिभुज ABC का केन्द्रक $\frac{a+b+c}{3}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ हैं।

(B) $\hat{i}+\hat{j}+\hat{j}$ तीनों सदिषें पर समान रूप से झुका हुआ है।

(C) मूलबिन्दु से त्रिभुज ABC के समतल पर डाल गया लम्ब केन्द्रक पर मिलता है।

(D) त्रिभुज ABC समबाहु त्रिभुज है।

23. यदि $\hat{i}$ एवं $\hat{j}$ निकाय में दो सदिष $\vec{z}_1 = a\hat{i}+b\hat{j}$ और $\vec{z}_2 = c\hat{i}+d\hat{j}$ है, जहाँ $|\vec{z}_1| = |\vec{z}_2| = r$ और $\vec{z}_1.\vec{z}_2 = 0$. तो $\vec{w}_1 = a\hat{i}+c\hat{j}$ और $\vec{w}_2 = b\hat{i}+d\hat{j}$ संतुष्ट करते हैं –

(A) $|\vec{w}_1| = r$ (B) $|\vec{w}_2| = r$ (C) $\vec{w}_1.\vec{w}_2 = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं

24. एक रेखा बिन्दु A से गुजरती है जिसका स्थिति सदिष $3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ है और सदिष $2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ के समान्तर है। यदि इस रेखा पर एक बिन्दु P इस प्रकार है कि AP=15 इकाई, तो बिन्दु P का स्थिति सदिष है –

(A) $13\hat{i}+4\hat{j}-9\hat{k}$ (B) $13\hat{i}-4\hat{j}+9\hat{k}$ (C) $7\hat{i}-6\hat{j}+11\hat{k}$ (D) $-7\hat{i}+6\hat{j}-11\hat{k}$

25. यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो असंरेखीय इकाई सदिष हैं और $\vec{a}, \vec{b}, x\vec{a}-y\vec{b}$ एक त्रिभुज बनाते हैं, तो

(A) x=-1; y=1 & $|\vec{a}+\vec{b}| = 2\cos\left(\frac{\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}}{2}\right)$

(B) x=-1; y=1 & $\cos\left(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}\right)+|\vec{a}+\vec{b}|\cos\left[\widehat{\vec{a}, -(\vec{a}+\vec{b})}\right] = -1$

(C) $|\vec{a}+\vec{b}| = -2\cot\left(\frac{\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}}{2}\right)\cos\left(\frac{\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}}{2}\right)$ & x=–1,y=1

(D) इनमें से कोई नहीं

26. एक समकोण त्रिभुजकार प्रिज्म $ABCA_1B_1C_1$ का आयतन 3 है। यदि आधार ABC के शीर्षो के स्थिति सदिष A(1,0,1); B(2,0,0) और C(0,1,0) हैं, तो शीर्ष A_1 का स्थिति हो सकता है –

(A) (2,2,2) (B) (0,2,0) (C) (0,-2,2) (D) (0,- 2,0)

27. निम्न में से कौनसा कथन सही है ?
   (A) यदि किसी अशून्य सदिष $\vec{n}$ के लिए $\vec{n}.\vec{a}=0$, $\vec{n}.\vec{b}=0$ और $\vec{n}.\vec{c}=0$ हो, तो $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=0$
   (B) एक ऐसा सदिष विद्यमान है जिसके दिषात्मक कोण $\alpha=30^0$ एवं $\beta=45^0$ है।
   (C) बिन्दु का बिन्दुपथ जिसके लिए रेखा x=3 और y=4,z-अक्ष के समान्तर है और z-अक्ष से उसकी दूरी 5 है।
   (D) एक सम चतुष्टफलक के शीर्ष OABC हैं जहाँ 'O' मूल बिन्दु है, तो सदिष $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ समतल ABC के लम्बवत् हैं।

2-B (विषयात्मक प्रष्न)

1. यदि $\vec{a},\vec{b}$ दो इकाई सदिष है और θ उनके मध्य कोण है, तो प्रदर्षित कीजिए कि

   (i) $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}|\vec{a}-\vec{b}|$ (ii) $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}|\vec{a}+\vec{b}|$

2. समान्तर चतुर्भुज PQRS की भुजाओं QR और RS पर दो बिन्दु क्रमषः X एवं Y इस प्रकार लिये जाते हैं कि QX=4XR और RY=4YS. रेखा XY रेखा PR को Z पर काटती है। PZ:ZR का अनुपात ज्ञात करों।

3. सदिष का उपयोग करके प्रदर्षित कीजिए कि ΔABC के कोण का अन्तः (बाह्य) कोण अर्धक आधार को शेष भुजाओं के अनुपात में अन्तः (बाह्य) विभाजित करता हैं।

4. एक त्रिभुज ABC के समतल में भुजाओं AC एवं BC पर बाहर की ओर दो वर्ग क्रमषः ACXY एवं BCWZ बनाये जाते हैं। दिया गया है कि $\overrightarrow{CX}=\vec{b},\overrightarrow{CA}=\vec{a},\overrightarrow{CW}=\vec{x},\overrightarrow{CB}=\vec{y}$ सिद्ध कीजिए कि $\vec{a}.\vec{y}+\vec{x}.\vec{b}=0$ और दर्षाइये कि $\overrightarrow{AW}.\overrightarrow{BX}=0$

5. बिन्दु O पर दो बल $\vec{P},\vec{Q}$ कार्यरत हैं और उनका परिणामी बल $\vec{R}$ है। यदि कोई तिर्यक रेखा इनकी क्रिया रेखा को बिन्दुओं A,B,C पर काटती है, तो पद्रर्षित कीजिए कि $\frac{P}{OA}+\frac{Q}{OB}=\frac{R}{OC}$

6. एक चतुष्फलक में यदि सम्मुख किनारों वाले दो युग्म लम्बवत् है, तो प्रदर्षित कीजिए कि सम्मुख किनारों वाला तीसरा युग्म भी लम्बवत है और इस स्थिति में दो सम्मुख किनारों के वगो का योगफल प्रत्येक युग्म के लिए समान है। यह प्रदर्षित करो कि सम्मुख किनारों के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड एक–दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

7. (i) मानाकि $\vec{A}=2i+k$; $\vec{B}=i+j+k$ और $\vec{C}=4i-3j+7k$ है। $\vec{R}\times\vec{B}=\vec{C}\times\vec{B}$ & $\vec{R}.\vec{A}=0$ को सतुंष्ट करने वाला सदिष $\vec{R}$ ज्ञात कीजिए।

   (ii) एक सदिष $\vec{v}$ ज्ञात कीजिए जो सदिषों $\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ और $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ के समतलीय है और सदिष $-2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ के समतलीय है और सदिष $-2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ के अनुदिष $\vec{v}$ का प्रक्षेप $6\sqrt{3}$ हैं।

8. किसी त्रिभुज ABC में सदिष विध्यिा का उपयोग करके सिद्ध कीजिए कि परिकेन्द्र और लम्बकेन्द्र के मध्य दूरी

$R\sqrt{1-8\cos A\cos B\cos C}$ है। जहाँ R त्रिभुज ABC की परित्रिज्या है।

9. समतलों $\vec{r}.(3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=1$ और $\vec{r}.(3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=1$ की प्रतिच्छेदन रेखा ज्ञात कीजिए।

10. चार अशून्य सदिश $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ एवं $\vec{d}$ है। सदिश $\vec{a},\vec{b}$ एवं $\vec{c}$ समतलीय हैं लेकिन असंरेखीय युग्म बनाते हैं और सदिश $\vec{d}$ सदिशों $\vec{a},\vec{b}$ एवं $\vec{c}$ के साथ समतलीय नहीं हैं और $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{c})=\frac{\pi}{3}, (\vec{d}\,\hat{}\,\vec{a})=\alpha, (\vec{d}\,\hat{}\,\vec{b})=\beta$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $(\vec{d}\,\hat{}\,\vec{c})=\cos^{-1}(\cos\beta-\cos\alpha)$.

11. (a) सदिश विधि का उपयोग करके सिद्ध कीजिए कि एक समचतुष्फलक के समतल के पृष्ठों के बीच न्यूनकोण arc cos(1/3) है।

    (b) सदिश विधि का उपयोग करके एक समचतुष्फलक की परित्रिज्या और अन्तः त्रिज्या को किनारों की लम्बाई k के पदों में निम्न ज्ञात कीजिए।

12. वह बिन्दु R ज्ञात कीजिए जहाँ रेखा AB समतल CDE को काटती है, जहाँ बिन्दुओं A,B,C,D,E के स्थिति सदिष क्रमषः $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{c}=-4\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{d}=2\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ और $\vec{e}=4\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ हैं।

13. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ एवं $\vec{a}',\vec{b}',\vec{c}'$ सदिषों के व्युत्क्रम निकाय है तो सिद्ध कीजिए कि

    (i) $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}][\vec{a}'\,\vec{b}'\,\vec{c}']=1$ (ii) $(\vec{a}'\times\vec{b}')+(\vec{b}'\times\vec{c}')+(\vec{c}'\times\vec{a}')=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}$

14. प्रदर्षित कीजिए कि चतुष्फलक OABC का परिकेन्द्र $\frac{\vec{a}^2(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}^2(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}^2(\vec{a}\times\vec{b})}{2[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}$ है, जहाँ $\vec{a},\vec{b}$ एवं $\vec{c}$ क्रमषः बिन्दुओं A,B,C के मूलबिन्दु 'O' के सापेक्ष स्थिति हैं।

15. सदिष $\vec{p}$ के लिए समीकरण $\vec{p}\times\vec{a}+(\vec{p}.\vec{b})\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c}$ को हल कीजिए, जहाँ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ अषून्य असमतलीय सदिष हैं और $\vec{a}$ ना तो $\vec{b}$ और ना ही $\vec{c}$ के लम्बवत् है। अतः प्रदर्षित कीजिए कि $\left(\vec{p}\times\vec{a}+\frac{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}{\vec{a}.\vec{c}}\vec{c}\right)$, $\vec{b}-\vec{c}$ के लम्बवत् है।

16. चार अषून्य सदिष $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ एवं $\vec{d}$ इस प्रकार है कि कोई भी तीन समतलीय नहीं है, तो सिद्ध कीजिए कि
$\vec{a}[\vec{b}\vec{c}\vec{d}]+\vec{c}[\vec{a}\vec{b}\vec{d}]=\vec{b}[\vec{a}\vec{c}\vec{d}]+\vec{d}[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ अतः सिद्ध कीजिए कि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ एवं $\vec{d}$ एक समतल चतुर्भुज के शीर्षो के स्थिति सदिषों के प्रदर्षित करते हैं यदि ओर केवल यदि $\frac{[\vec{b}\vec{c}\vec{d}]+[\vec{a}\vec{b}\vec{d}]}{[\vec{a}\vec{c}\vec{d}]+[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}=1$.

17. निम्न बिन्दुओं के समूह की समतलीयता की जाँच कीजिए –

(i) $4\hat{i}+8\hat{j}+12\hat{k}$, $2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$, $3\hat{i}+5\hat{j}+4\hat{k}$, $5\hat{i}+8\hat{j}+5\hat{k}$

(ii) $3\vec{a}+2\vec{b}-5\vec{c}$, $3\vec{a}+8\vec{b}+5\vec{c}$, $-3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+4\vec{b}-3\vec{c}$

Exercise – 3

3-A (स्तम्भ मिलान)

1. स्तम्भ -I — स्तम्भ -II

(A) दो सदिषों $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ और $\vec{b} = -2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ दिये है तथा $\lambda = \dfrac{\text{सदिश } \vec{a} \text{ का सदिश } \vec{b} \text{ पर प्रक्षेप}}{\text{सदिश } \vec{b} \text{ का सदिश } \vec{a} \text{ पर प्रक्षेप}}$, तब 3λ का मान है। — (p) 1

(B) यदि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ तथा $\vec{a} + P\vec{b}$ सदिष $\vec{c}$ के लम्बवत् है तो P= — (q) 7

(C) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन अषून्य सदिष इस प्रकार है कि $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ तब $\lambda\vec{b}\times\vec{a} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a} = 0$ है तो λ= — (r) 5

(D) $\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k}) + \hat{j}.(\hat{i}\times\hat{k}) + \hat{k}.(\hat{i}\times\hat{j}) =$ — (s) 2

2. स्तम्भ -I — स्तम्भ -II

(A) यदि सदिष $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}, \vec{b} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ एवं $\vec{c} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$, एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ बनाते हैं। यदि सदिष $\vec{c}$ को समद्विभाजित करने वाली माध्यिका की लम्बाई λ है, तो λ^2 होगा – — (p) 2

(B) माना $\vec{p}$ त्रिभुज ABC के लम्बकेन्द्र $\vec{g}$ के लम्बकेन्द्र का स्थिति सदिष है और $\vec{g}$ केन्द्रक का स्थिति सदिष है जहाँ परिकेन्द्र मूल बिन्दु है। यदि $\vec{p} = K\vec{g}$ हो, तो K= — (q) 3

(C) एक समान्तर चतुर्भुज जिसे सदिषों $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ और $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$ के द्वारा बनाया गया है, जहाँ $\vec{p}$ और $\vec{q}$ इकाई सदिष हैं और उनके मध्य कोण 30^0 है, के क्षेत्रफल का दुगुना है – — (r) 6

(D) समान्तर षट्फलक (parallelopiped) का आयतन जिसकी भुजाऐं कमषः $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} - 3\hat{j}, \overrightarrow{OB} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ और $\overrightarrow{OC} = 3\hat{i} - \hat{k}$ हैं, होगा – — (s) 4

3-B (कथन / कारण)

3. कथन 1: यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ तीन असमतलीय सदिष है तथा $\vec{d}$ कोई अन्य सदिष है तो

$$[\vec{d}\vec{b}\vec{c}]\vec{a}+[\vec{d}\vec{c}\vec{a}]\vec{b}+[\vec{d}\vec{a}\vec{b}]\vec{c}-\vec{d}[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=0$$

कथन 2 : त्रिविम में एक सदिष को तीन असमतलीय सदिषों के रेखिक संचय में व्यकत किया जा सकता है।

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।

(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2,कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।

(C) कथन–1 सत्य है कथन–2 असत्य है।

(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।

4. कथन 1: तीन इकाई सदिष $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ इस प्रकार है कि $\vec{a}+5\vec{b}+3\vec{c}=0$, तो $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}.(\vec{a}+\vec{c})$

कथनन 2: तीन समतलीय सदिषों का अदिष त्रिगुणन (Box product) शून्य होता है।

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।

(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2,कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।

(C) कथन–1 सत्य है कथन–2 असत्य है।

(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।

5. कथन 1 : यदि $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}, \vec{a}\neq 0$,तो $\vec{b}=\vec{c}+\lambda\vec{a}$

कथन 2 : यदि दो सदिष असंरेखीय और अषून्य है तो वे रेखिकतः स्वतंत्र होती है।

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।

(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2,कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।

(C) कथन–1 सत्य है कथन–2 असत्य है।

(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।

6. कथन –1 : यदि त्रिभुज ABC का अन्तकेन्द्र I है तो $|\overrightarrow{BC}|\overrightarrow{IA}+|\overrightarrow{CA}|\overrightarrow{IB}+|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{IC}=0$

कथन –2 : यदि किसी त्रिभुज में शीर्ष बिन्दुओं के स्थिति $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ हो तो अन्तकेन्द्र का स्थिति सदिष $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ होता है।

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2,कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है कथन–2 असत्य है।
(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।

3-C (अनुच्छेद)

7. अनुच्छेद

यदि A, B और C तीन असंरेखीय बिन्दु हैं जिनके स्थिति सदिष क्रमषः $\vec{a},\vec{b}$ और $\vec{c}$ हैं और समतल ABC मूलबिन्दु से नहीं गुजरता है, तो

7.1 सदिष $\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\times\vec{a}$

(A) समान्तर सदिष (B) समतलीय सदिष (C) असमतलीय सदिष (D) रेखीय रूप से निर्भर सदिष

7.2 यदि $|\vec{b}|=1,|\vec{c}|=1,|\vec{a}|=7$ और $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{e}\times\vec{a})=\frac{1}{2}\vec{a}$, जहॉं $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ अंसरेखीय सदिष हो, तो $|\vec{a}\times\vec{c}|$ बराबर है –

(A) 7 (B) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{7}{2}$ (D) $\frac{7}{\sqrt{2}}$

7.3 समतल ABC का समीकरण निम्न में से किससे दिया जा सकता है –

(A) $r.(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})=0$ (B) $[\vec{r}\,\vec{a}\,\vec{b}]+[\vec{r}\,\vec{b}\,\vec{c}]+[\vec{r}\,\vec{c}\,\vec{a}]+[\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}]=0$

(C) $(\vec{r}-\vec{a}).(\vec{a}\times\vec{b})=0$ (D) $[\vec{r}\,\vec{a}\,\vec{b}]+[\vec{r}\,\vec{b}\,\vec{c}]+[\vec{r}\,\vec{c}\,\vec{a}]+[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{a}]=0$

8. अनुच्छेद

$\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k},\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ और अशून्य सदिष $\vec{c}$ संबंध $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ से परिभाषित है

8.1 तो सदिष $\vec{c}$ है

(A) $4\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$ (B) $4\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ (C) $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ (D) $\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k}$

8.2 समान्तर षटफलक का आयतन जिसकी आसन भुजायें $\vec{a},\vec{b},\vec{b}\times\vec{c}$ (पूर्व प्रष्न के $\vec{c}$ का उपयोग करते हुए)

(A) 18 (B) 54 (C) 12 (D) 36

8.3 सदिष $\vec{b}$ और $\vec{c}$ के मध्य अधिक कोण अर्धक है

(A) $(2+\sqrt{3})\hat{i}+(1-\sqrt{3})\hat{j}+(2+\sqrt{3})\hat{k}$ (B) $(2+\sqrt{3})\hat{i}+(1-\sqrt{3})\hat{j}-(2+\sqrt{3})\hat{k}$

(C) $(2-\sqrt{3})\hat{i}+(\sqrt{3}+1)\hat{j}+(2+\sqrt{3})\hat{k}$ (D) $(2+\sqrt{3})\hat{i}-(1-\sqrt{3})\hat{j}+(2+\sqrt{3})\hat{k}$

3-D (सत्य / असत्य कथन)

9. $\vec{a}\times\left[\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})\right]=-(\vec{a}\times\vec{b})\ (\vec{a}^2)$

10. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ असमतलीय सदिष है और $\vec{v}.\vec{a}=\vec{v}.=\vec{v}.\vec{c}=0$ हो, तो $\vec{v}$ निष्चित रूप से एक शून्य सदिष होना चाहिए।

11. यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ एक समतल में है जो सदिष $\vec{c}$ और $\vec{d}$ वाले समतल के लम्बवत् है, तो $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=0$.

12. दिए $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ और $\vec{a}',\vec{b}',\vec{c}'$ सदिषों के व्युत्क्रम निकाय हैं, तो $\vec{a}.\vec{b}'+\vec{b}.\vec{c}'+\vec{c}.\vec{a}'=3$

13. सदिष $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ समान लम्बाई के हैं और युग्मों में समान कोण बनाते हैं। यदि $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}$ और $\vec{b}=\hat{j}+\hat{k}$ हो, तो $\vec{c}$ का स्थिति सदिष (1, 0, 1) है।

3-E (रिक्त स्थान की पूर्ति)

14. दो सरल रेखाओं $\vec{r}=3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}+\lambda(-2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$ और $\vec{r}=\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}+\mu(3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k})$ के बीच कोण ___________ हैं।

15. सदिषों $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ और $3\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$ के लम्बवत् इकाई सदिष __________है।

16. $(\vec{r}.\hat{i})(\hat{i}\times\vec{r})+(\vec{r}.\hat{j})(\hat{j}\times\vec{r})+(\vec{r}.\hat{k})(\hat{k}\times\vec{r})$ =________ .

17. सदिष $\vec{r}$ =(1, –8, –7) द्वारा निरूपित बल को तीन परस्पर लम्बवत् दिषाओं में वियोजित किया जाता है जिनमें से एक सदिष $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ की दिषा है। तो सदिष $\vec{a}$ की दिषा में बल $\vec{r}$ का सदिष घटक _________ है।

18. बिन्दु जिनके स्थिति $p\hat{i}+q\hat{j}+r\hat{k};q\hat{i}+r\hat{j}+p\hat{k}$ और $r\hat{i}+p\hat{j}+q\hat{k}$ है, संरेखीय है, तो

$p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp$=_________.

Exercise -4

4-A (पूर्वर्ती JEE परीक्षा प्रश्न)

IIT-JEE-2008

1. एक षट्फलक (parallelopiped) की धार–रेखाएँ (edges) एकांक लम्बाई (unit length) की हैं व असमतलीय (non-complanar) इकाई सदिशों (unit vector) $\hat{a},\hat{b},\hat{c}$ जहाँ $\hat{a}.\hat{b}=\hat{b}.\hat{c}=\hat{c}.\hat{a}-\frac{1}{2}$ समांतर हैं। तब षट्फलक का आयतन निम्न है

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. माना असंरेखीय (non-collineara) इकाई सदिश $\hat{a}$ व $\hat{b}$ एक निम्न कोण बनाते हैं। एक बिन्दु P ऐसे चलता है कि किसी समय t पर स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP}$ (जहॉ O मूलबिन्दु है) $\hat{a}\cos t+\hat{b}\sin t$ द्वारा दिया जाता है। माना, जब P मूलबिन्दु O से अधिकतम दूरी पर है, तब $\overrightarrow{OP}$ की लम्बाई M तथा $\overrightarrow{OP}$ के समांतर इकाई सदिश $\hat{u}$ है। तब,

(A) $\hat{u}=\frac{\hat{a}+\hat{b}}{|\hat{a}+\hat{b}|}$ और $M=(1+\hat{a}.\hat{b})^{1/2}$ (B) $\hat{u}=\frac{\hat{a}-\hat{b}}{|\hat{a}-\hat{b}|}$ और $M=(1+\hat{a}.\hat{b})^{1/2}$

(C) $\hat{u}=\frac{\hat{a}+\hat{b}}{|\hat{a}+\hat{b}|}$ और $M=(1+2\hat{a}.\hat{b})^{1/2}$ (D) $\hat{u}=\frac{\hat{a}-\hat{b}}{|\hat{a}-\hat{b}|}$ और $M=(1+2\hat{a}.\hat{b})^{1/2}$

3. एक कण P, बिन्दु z_0=1+2i, जहाँ $i=\sqrt{-1}$, से चलना प्रारंभ करता है। यह पहले क्षैतिज (horizontal) दिशा में 5 एकांक (units) मूलबिन्दु से दूर की ओर व फिर ऊर्ध्व (vertical) दिशा में 3 एकांक मूलबिन्दु से दूरी की ओर चल कर बिन्दु z_1 पर पहुंचता है। बिन्दु z_1 से यह कण सदिश $\hat{i}+\hat{j}$ की दिशा में $\sqrt{2}$ एकांक चलता है व फिर यह वृत्त, जिसका केन्द्र मूलबिन्दु पहुंचता है। बिन्दु (anticlockwise) $\frac{\pi}{2}$ कोण चलकर बिन्दु z_2 पह पहुंचता है। बिन्दु z_2 निम्न है

(A) 6+7i (B) -7+6i (C) 7+6i (D) -6+7i

IIT-JEE-2007

4. सदिशों $-\lambda^2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k},\hat{i}-\lambda^2\hat{j}+\hat{k}$ और $\hat{i}+\hat{j}-\lambda^2\hat{k}$ के समतलीय होने के लिए λ के विभिन्न वास्तविक मानों की संख्या है –
(A) शून्य (B) एक (C) दो (D) तीन

5. मानाकि सदिश $\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{QR},\overrightarrow{RS},\overrightarrow{ST},\overrightarrow{TU}$ और $\overrightarrow{UP}$ एक सम षट्भुज की भुजाओं को निरूपित करते है।
कथन –1 : $PQ,\times\left(\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{ST}\right)\neq\vec{0}$
क्योंकि
कथन–2 : $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{RS}=\vec{0}$ and $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{ST}\neq\vec{0}$
(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2,कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है कथन–2 असत्य है ;

(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।

6. मानाकि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ इकाई सदिष इस प्रकार है कि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. निम्न में से कौनसा सत्य है ?

(A) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}=0$

(B) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}\neq\vec{0}$

(C) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}\neq 0$

(D) $\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}$ परस्पर लम्बवत् है।

IIT-JEE-2006

7. एक समतल π_1 सदिषों 2j+3k एवं 4j–3k के समान्तर हैं तथा अन्य समतल π_2 सदिषों j–k एवं i+j के समान्तर है। एक सदिष a समतलों π_1 एवं π_2 की प्रतिच्छेन रेखा के समान्तर है। a एवं b=2i+2j–k के मध्य कोण है –

(A) $\pi/3$ (B) $2\pi/3$ (C) $\pi/4$ (D) $3\pi/4$

8. मानाकि $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k},\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ और $\vec{c}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ हैं। $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के समतल में एक सदिष जिसका $\vec{c}$ पर प्रक्षेप $\frac{1}{\sqrt{3}}$ हो, है –

(A) $4\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ (B) $3\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ (C) $2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ (D) $4\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$

9. **मिलान कीजिए –**

स्तम्भ–I		**स्तम्भ –II**
(a)	बिन्दु (α, β, γ) समतल x+y+z=2 पर स्थित है तथा a=αi+Bj+γh एवं k×(k×a)=0 हो, तो γ बराबर है –	(i) 1
(b)	$\left\|\int_0^4(1-t^2)dt\right\|+\left\|\int_1^0(t^2-1)dt\right\|=$	(ii) 2
(c)	यदि त्रिभुज ABC में sin A sin B sin C+cos A cos B=1 हो, तो 2 sin (C/2) बराबर है –	(iii) 4/3
](d)	दो किरणों x+y=|a| एवं ax–y=1 प्रथम चतुर्थाष में एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं यदि $a\in(\alpha,\infty)$, ते α का मान है – 000	(iv) $\sqrt{2}$

10. 3×3 क्रम का आव्यूह A है और $\vec{u}$ एक सदिष है। यदि $A\vec{u}$ और $\vec{u}$ सभी वास्तविक $\vec{u}$ के लिए लम्बवत् हो, तो आव्यूह A है –

(A) अव्युत्क्रमणीय (B) व्युत्क्रमीण (C) सममित (D) विषमसममित

IIT-JEE-2005

11. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ तीन अषून्य समतलीय सदिष है और $\vec{b}_1=\vec{b}-\frac{\vec{b}.\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$, $\vec{b}_2=\vec{b}+\frac{\vec{b}.\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$

$\vec{c}_1=\vec{c}-\frac{\vec{c}.\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}+\frac{\vec{b}.\vec{c}}{|\vec{c}|^2}\vec{b}_1$, $\vec{c}_2=\vec{c}-\frac{\vec{c}.\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}+\frac{\vec{b}.\vec{c}}{|\vec{b}_1|^2}\vec{b}_1$, $\vec{c}_3=\vec{c}-\frac{\vec{c}.\vec{a}}{|\vec{c}|^2}\vec{a}+\frac{\vec{b}.\vec{c}}{|\vec{c}|^2}\vec{b}_1$,

$\vec{c}_4=\vec{c}-\frac{\vec{c}.\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}+\frac{\vec{b}.\vec{c}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}_1$ हो, तो लम्बवत् सदिषों का समुच्चय है –

(A) $(\vec{a},\vec{b}_1,\vec{c}_3)$ (B) $(\vec{a},\vec{b}_1,\vec{c}_2)$ (C) $(\vec{a},\vec{b}_1,\vec{c}_1)$ (D) $(\vec{a},\vec{b}_2,\vec{c}_2)$

12. यदि किसी पृष्ठ पर आपतित किरण सदिष $\hat{v}$ के अनुदिष हो, परावर्तित किरण इकाई सदिष $\hat{w}$ के अनुदिष हो और अभिलम्ब इकाई सदिष $\hat{a}$ के अनुदिष बाहर की ओर हो, तो $\hat{w}$ को $\hat{a}$ और $\hat{v}$ के पदों में व्यक्त कीजिए।

IIT-JEE-2004

13. यदि $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{a}.\vec{b}=1$ और $\vec{a}\times\vec{b}=\hat{j}-\hat{k}$ हो, तो $\vec{b}$ है –

(A) $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ (B) $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ (C) $\hat{i}$ (D) $2\hat{i}$

14. सदिष $3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k}$ के लम्बवत् और सदिषों $2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ एवं $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ के समतलीय इकाई सदिष है –

(A) $\dfrac{2\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{41}}$ (B) $\dfrac{2\hat{i}-3\hat{j}}{\sqrt{13}}$ (C) $\dfrac{3\hat{i}-\hat{k}}{\sqrt{10}}$ (D) $\dfrac{4\hat{i}+3\hat{j}-3\hat{k}}{\sqrt{34}}$

15. दिया गया है कि : $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$ और $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$ (जहाँ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ औश्र $\vec{d}$ भिन्न–भिन्न है।)
तो सिद्ध कीजिए कि $\vec{a}.\vec{b}+\vec{d}.\vec{c}\neq\vec{b}.\vec{d}+\vec{a}.\vec{c}$

IIT-JEE-2003

16. a का वह मान जिसके लिए $\hat{i}+a\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{j}+a\hat{k}$ और $a\hat{i}+\hat{k}$ से निर्मित समान्तर षट्भुज का आयतन न्यूनतम हो –

(A) –3 (B) 3 (C) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{3}$

17. यदि $\hat{u},\hat{v},\hat{w}$ तीन असमलीय इाकई सदिष हैं और $\hat{u}$ और $\hat{v}$ के मध्य कोण α, $\hat{v}$ और $\hat{w}$ के मध्य कोण β और $\hat{w}$ और $\hat{u}$ के मध्य कोण γ है। यदि कोणों α, β, γ के अर्द्धकों के अनुदिष इकाई सदिष $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left[\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}\right]=\frac{1}{16}[\hat{u}\,\hat{v}\,\hat{w}]^2\sec^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sec^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\sec^2\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

IIT-JEE-2002

18.

(i) यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो इकाई सदिष इस प्रकार है कि $\vec{a}+2\vec{b}$ और $5\vec{a}-4\vec{b}$ परस्पर लम्बवत् हो, तो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के मध्य कोण है –

(A) 45^0 (B) 60^0 (C) $\cos^{-1}(1/3)$ (D) $\cos^{-1}(2/7)$

(ii) मानाकि $\vec{V}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ और $\vec{W}=\hat{i}+3\hat{k}$ हैं। यदि $\vec{U}$ इकाई सदिष हो, तो अदिष त्रिक गुणन $\left|\vec{U}\vec{V}\vec{W}\right|$ का अधिकतम मान है –

(A) –1 (B) $\sqrt{10}+\sqrt{6}$ (C) $\sqrt{59}$ (D) $\sqrt{60}$

19. माना सदिशों $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$, $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$, $\vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ से निर्मित समान्तर षट्भलक का आयतन V है। यदि a_r, b_r, c_r जहाँ r=1, 2, 3, अऋणात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं और $\sum_{r=1}^{3}(a_r+b_r+c_r)=3L$, तो प्रदर्षित कीजिए कि $V \le L^3$.

IIT-JEE-2001

20. यदि $\vec{a},\vec{b}$ और $\vec{c}$ इकाई सदिष हो, तो $|\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{b}-\vec{c}|^2+|\vec{c}-\vec{a}|^2$ का अधिकतम मान है –

(A) 4 (B) 9 (C) 8 (D) 6

21. यदि $\vec{a}=\vec{i}-\vec{k}, \vec{b}=x\vec{i}+\vec{j}+(1-x)\vec{k}$ और $\vec{c}=y\vec{i}+x\vec{j}+(1+x-y)\vec{k}$ हो, तो $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ किस पर आश्रित है –

(A) केवल x पर (B) केवल y पर (C) न तो x पर न y पर (D) x और y दोनों पर

22. सदिष विध से प्रदर्षित कीजिए कि त्रिभुज के कोणों के अर्द्धक संगामी हैं और शीर्षो के स्थिति सदिष के पदों में संगामी बिन्दु के स्थिति सदिष का व्यंजक ज्ञात कीजिए।

23. मानाकि $\vec{A}(t)=f_1(t)\hat{i}+f_2(t)\hat{j}$ और $\vec{B}(t)=g_1(t)\hat{i}+g_2(t)\hat{j}$, $t\in[0, 1]$ हैं जहाँ f_1, f_2, g_1, g_2 सतत् फलन है। यदि

$\vec{A}(t)$ और $\vec{B}(t)$ सभी t के लिए अषून्य सदिष है और $\vec{A}(0)=2\hat{i}+3\hat{j}$, $\vec{A}(1)=6\hat{i}+2\hat{j}$, $\vec{B}(0)=3\hat{i}+2\hat{j}$ एवं

$\vec{B}(1)=2\hat{i}+6\hat{j}$ हो, तो प्रदर्षित कीजिए कि कुछ t के लिए $\vec{A}(t)$ और $\vec{B}(t)$ समान्तर हैं।

24. त्रिविमीय सदिष $\vec{v}_1,\vec{v}_2,v_3$ ज्ञात कीजिए जो $\vec{v}_1.\vec{v}_1=4$, $\vec{v}_1.\vec{v}_2=-2$, $\vec{v}_1.\vec{v}_3=6$, $\vec{v}_2.\vec{v}_2=2$, $\vec{v}_2.\vec{v}_3=-5$, $\vec{v}_3.\vec{v}_3=29$. को संतुष्ट करते हो।

IIT-JEE-200

25.

(i) यदि सदिष $\vec{a},\vec{b}$ और $\vec{c}$ त्रिभुज ABC की भुजाएँ कमषः BC, CA तथा AB बनाते हो, तो –

(A) $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}=0$ (B) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

(C) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}=\vec{c}.\vec{a}$ (D) $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}$

(ii) मानाकि सदिष $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ और $\vec{d}$ इस प्रकार है कि $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{0}$. यदि सदिष युग्मों $\vec{a},\vec{b}$ और $\vec{c},\vec{d}$ से निर्मित समतल क्रमषः P_1 और P_2 हो, तो P_1 और P_2 के मध्य कोण है –

(A) 0 (B) π/4 (C) π/3 (D) π/2

(iii) यदि $\vec{a},\vec{b}$ और $\vec{c}$ इकाई समतलीय सदिष हो, तो अदिष त्रिक गुणन $[2\vec{a}-\vec{b} \;\; 2\vec{b}-\vec{c} \;\; 2\vec{c}-\vec{a}]=$

(A) 0 (B) 1 (C) $-\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{3}$

26. माना ABC और PQR दो त्रिभुज एक ही समतल में स्थित है। माना कि बिन्दुओं A, B, C से क्रमषः भुजाओं QR, RP, PQ

पर डाले गये लम्ब संगामी हैं। सदिष विधि का उपयोग करके या किसी अन्य विधि से सिद्ध कीजिए कि P, Q, R से क्रमशः भुजाओं पर BC, CA, AB पर लम्ब भी संगामी है।

IIT-JEE-1999

27.

(i) माना $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$ हैं। यदि एक सदिष $\hat{c}$ इस प्रकार है कि $\vec{a}.\vec{c} = |\vec{c}|, |\vec{c} - \vec{a}| = 2\sqrt{2}$ और $(\vec{a}\times\vec{b})$ तथा $\vec{c}$ के मध्य कोण 30^0 हो, तो $|(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}| =$

(A) 2/3 (B) 3/2 (C) 2 (D) 3

(ii) माना $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ और एक इकाई सदिष $\vec{c}$ समतलीय है। यदि $\vec{c}, \vec{a}$ के लम्बवत् है, तो $\vec{c} =$

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{j} + \hat{k})$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$ (C) $\frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{i} - 2\hat{j})$ (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} - \hat{j} - \hat{j})$

(iii) मानाकि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो असंरेखीय इकाई सदिष है। यदि $\vec{u} = \vec{a} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{b}$ और $\vec{v} = \vec{a}\times\vec{b}$ हो, तो $|\vec{v}|$ है –

(A) $|\vec{u}|$ (B) $|\vec{u}| + |\vec{u}.\vec{a}|$ (C) $|\vec{u}| + |\vec{u}.\vec{b}|$ (D) $\vec{u} + \vec{u}.(\vec{a} + \vec{b})$

28. माना $\vec{u}$ और $\vec{v}$ इकाई सदिष है। यदि एक सदिष $\vec{w}$ इस प्रकार है कि $\vec{w} + (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $|(\vec{u}\times\vec{v})| \le \frac{1}{2}$ और समतला होगी यदि और केवल यदि $\vec{u}, \vec{v}$ के लम्बवत् हो।

IIT-JEE-1998

29.

(i) यदि $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ और $\vec{c} = \hat{i} + \alpha\hat{j} + \beta\hat{k}$ रेखीय परतंत्र हैं और $|\vec{c}| = \sqrt{3}$ हो, तो :

(A) $\alpha=1, \beta=-1$ (B) $\alpha=1, \beta=\pm1$ (C) $\alpha=-1, \beta=\pm1$ (D) $\alpha=\pm1, \beta=1$

(ii) तीन सदिषों $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ के लिए भिन्न में से कौनसा व्यंजक अन्य तीन के बराबर नहीं है ?

(A) $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})$ (B) $(\vec{u}.\vec{v}).\vec{w}$ (C) $(\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$ (D) $\vec{u}\times(\vec{v}.\vec{w})$

(iii) निम्न में से कौनसे व्यंजक अर्थयुक्त है ?

(A) $\vec{u}\,.\,(\vec{v}\times\vec{w})$ (B) $(\vec{u}\,.\,\vec{v}).\vec{w}$ (C) $(\vec{u}\,.\,\vec{v}).\vec{w}$ (D) $\vec{u}\times(\vec{v}\,.\,\vec{w})$

30.

(a) सदिष विधि या किसी अन्य विधि से सिद्ध कीजिए कि एक समल्ब चतुर्भुज के विकर्णो का प्रतिच्छेद बिन्दु समान्तर भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा पर स्थित होता हैं। [आप यह मान सकते है कि समलम्ब चतुर्भुज एक समान्तर चतुर्भुज नहीं है।]

(b) किन्ही दो सदिषों $\vec{u}$ और $\vec{v}$ के लिए सिद्ध करो कि –

(a) $(\vec{u}.\vec{v})^2 + |\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$ एवं (b) $(1+|\vec{u}|^2)(1+|\vec{v}|^2) = (1-\vec{u}.\vec{v})^2 + |\vec{u}+\vec{v}+(\vec{u}\times\vec{v})|^2$

IIT-JEE-1997

31. माना $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = 10\vec{a} + 2\vec{b}$ तथा $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$ हैं, जहाँ O, A और C असंरेखीय बिन्दु है। माना p, चतुर्भुज OABC के क्षेत्रफल को प्रदर्षित करता है और q, समान्तर चतुर्भुज जिसकी आसन्न भुजाएँ OA और OC है, के क्षेत्रफल को प्रदर्षित करता है। यदि p=kq हो, तो k= ________.

32. माना a,b और c तीन सदिष हैं, जिनके परिमाण क्रमषः 1,1 और 2 है। यदि 1×(a×c)+b=0 हो, तो a और c के मध्य न्यून कोण ____________ है।

33. मानाकि $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ समान परिमाण के तीन परस्पर लम्बवत् सदिष हैं। यदि एक सदिष $\vec{x}$ समीकरण $\vec{p}\times((\vec{x}-\vec{q})\times\vec{q}\times((\vec{x}-\vec{r})\times\vec{q}) + \vec{r}\times((\vec{x}-\vec{p})\times\vec{r}) = \vec{0}$ को संतुष्ट करता है, तो $\vec{x}$ का मान है –

(A) $\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q}-2\vec{r})$ (B) $\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r})$ (C) $\frac{1}{3}(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r})$ (D) $\frac{1}{3}(2\vec{p}+\vec{q}-\vec{r})$

34. यदि सदिष $\vec{A},\vec{B}$ और $\vec{C}$ इस प्रकार है कि $|\vec{B}|=|\vec{C}|$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि–
$\left[(\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{A}+\vec{C})\right]\times(\vec{B}\times\vec{C}).(\vec{B}+\vec{C}) = 0$

35. माना $\vec{a},\vec{b}$ और $\vec{c}$ असमतलीय इकाई सदिष है, जो परस्पर समान कोण θ बनाते है। यदि $\vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ हो, तो अदिष p, q और r को θ के पदों में ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE-1996

36. एक अषून्य सदिष $\vec{a}$ सदिषों $\hat{i}-\hat{j}, \hat{i}+\hat{k}$ से गुजरने वाले समतलों की प्रतिच्छेदी रेखा के समान्तर है तो सदिष $\vec{a}$ और सदिष $\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ के बीच का कोण है

37. सदिष $\vec{b}$ और $\vec{c}$ असमरेखीय ईकाई सदिष है तथा $\vec{a}$ कोई अन्य सदिष है तब
$(\vec{a}.\vec{b})\vec{b} + (\vec{a}.\vec{c})\vec{c} + \frac{\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{b}\times\vec{c}|^2}(\vec{b}\times\vec{c}) =$ __________.

IIT-JEE-1995

38. $\vec{a} = \hat{i}-\hat{j}; \vec{b} = \hat{j}-\hat{k}, \vec{c} = \hat{k}-\hat{i}$ यदि $\vec{d}$ एक इकाई सदिष इस प्रकार है कि $\vec{a}.\vec{d} = 0 = [\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}]$ तो $\vec{d} =$

(A) $\pm\frac{\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{6}}$ (B) $\pm\frac{\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{3}}$ (D) $\pm\hat{k}$

39. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ तीन असमतलीय इकाई सदिष इस प्रकार है कि $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \frac{(\vec{b}\times\vec{c})}{\sqrt{2}}$ तो सदिष $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच कोण है

(A) $\frac{3\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

40. यदि $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=0$, $|\vec{u}|=3$, $|\vec{u}|=4$, $|\vec{w}|=5$ तो $\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{w}+\vec{w}.\vec{u}=$

(A) 47 (B) –25 (C) 0 (D) 25

IIT-JEE-1994

41. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ तीन असमतलीय सदिष हैं तो $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{c})]=$

(A) 0 (B) $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ (C) $2[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ (D) $[-\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$

42. $\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ तीन असमतलीय सदिष है तो सिद्ध करो कि सदिष $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})+(\vec{a}\times\vec{c})\times(\vec{d}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{d})\times(\vec{b}\times\vec{c})$ सदिष $\vec{a}$ के समान्तर है।

4-B (पूर्ववर्ती AIEEE/DCE परीक्षा प्रश्न)

---

43. यदि u और v इकाई सदिष है तथा 'θ' उनके बीच का कोण है, तो 2u×3v एक इकाई सदिष होगा

(A) θ के ठीक दो मानों के लिये (B) θ के दो से अधिक मानों के लिये
(C) θ के किसी भी मान के लिये नहीं (D) θ के ठीक एक मान के लिये

44. $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ तथा $\vec{c}=x\hat{i}+(x-2)\hat{j}-\hat{k}$ यदि सदिष $\vec{c}$ सदिषों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के समतल में स्थित हो तो x=

(A) 0 (B) 1 (C) –4 (D) –2

45. कोई तीन सदिष इस प्रकार है कि $\vec{a}.\vec{b}\neq 0$, $\vec{b}.\vec{c}\neq 0$ तो $\vec{a}$ और $\vec{c}$

(A) के बीच का $\frac{\pi}{6}$ है (B) लम्बवत् है (C) समान्तर है (D) के बीच का कोण $\frac{\pi}{3}$

46. 'a' का मान जिसके लिये बिन्दु A,B,C जिनके स्थिति सदिष क्रमषः $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ और $a\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}$ है एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष होगें जबकि $C=\frac{\pi}{2}$ है

(A) –2 तथा –1 (B) –2 तथा 1 (C) 2 तथा –1 (D) 2 तथा 1

47. यदि C, AB का मध्य बिन्दु है और P, AB के बाहर कोई बिन्दु है तो

(A) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$. (B) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=0$.

(C) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}=0$. (D) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PC}=0$.

48. रेखा $\vec{r}=2\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}+\lambda(\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k})$ और समतल $\vec{r}.(\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k})=5$ के बीच की दूरी है

(A) 10/3 (B) 3/10 (C) $\frac{10}{3\sqrt{3}}$ (D) 10/9

49. किसी सदिष $\vec{a}$ के लिये $(\vec{a}\times\hat{i})^2+(\vec{a}\times\hat{j})^2+(\vec{a}\times\hat{k})^2=$

(A) $4\vec{a}^2$ (B) $2\vec{a}^2$ (C) $\vec{a}^2$ (D) $3\vec{a}^2$

50. यदि $\vec{a}=\hat{i}-\hat{k}$, $\vec{b}=x\hat{i}+\hat{j}+(1-x)\hat{k}$ और $\vec{c}=y\hat{i}+x\hat{j}+(1+x-y)\hat{k}$ तो $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ निर्भर करता है

(A) न तो x पर और न ही y (B) x और y दोनों पर

(C) केवल x पर (D) केवल y पर

51. a,bc तीन अऋणात्मक भिन्न–भिन्न संख्यायें है यदि सदिश $a\hat{i}+a\hat{j}+c\hat{k}$, $\hat{i}+\hat{k}$ और $c\hat{i}+c\hat{j}+b\hat{k}$ एक समतल में स्थित है तो c है

(A) a और b का हरात्मक माध्य (B) शून्य
(C) a और b का समान्तर माध्य (D) a और b का गुणोत्तर माध्य

52. $\vec{a},\vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन अशून्य सदिश इस प्रकार है कि उनमें से कोई भी दो संरेखीय नहीं है यदि सदिश $\vec{a}+2\vec{b}$ सदिश $\vec{c}$ के संरेखीय है और सदिश $\vec{b}+3\vec{c}$ सदिश $\vec{a}$ (अशून्य अदिश λ के लिये), के संरेखीय है तो $\vec{a}+2\vec{b}+6\vec{c}=$

(A) $\lambda\vec{a}$ (B) $\lambda\vec{b}$ (C) $\lambda\vec{c}$ (D) 0

53. दो अचर बल $4\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ और $3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ एक कण का क्रियाशील है जिसके कारण कण बिन्दु $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ से बिन्दु $5\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k}$ पर विस्थापित हो जाता है तो बलों द्वारा किया गया कार्य (मानक मात्रक में) है

(A) 40 (B) 30 (C) 25 (D) 15

54. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ तीन असमतलीय सदिश है तथा λ एक वास्तविक संख्या है तो सदिश $\vec{a}+2\vec{b},+3\vec{c},\lambda\vec{b}+4\vec{c}$ औश्र $(2\lambda-1)\vec{c}$ असमतलीय होगें
(A) λ के सभी मानों के लिये
(B) λ के एक मान के अतिरिक्त सभी मानों के लिये
(C) λ के दो मानो के अतिरिक्त अन्य सभी मानों के लिये
(D) λ के किसी भी मान के लिये नहीं

55. $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ तीन सदिश इस प्रकार है कि $|\vec{u}|=1,|\vec{v}|=2,|\vec{w}|=3$ यदि सदिश $\vec{v}$ का सदिश $\vec{u}$ के अनुदिष प्रक्षेप सदिश $\vec{w}$ का सदिश $\vec{u}$ के अनुदिष प्रक्षेप के बराबर हो तथा सदिश $\vec{v}$ और $\vec{w}$ एक दूसरे के लम्बवत् हो तो $|\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}|=$

(A) 2 (B) $\sqrt{7}$ (C) $\sqrt{14}$ (D) 14

56. $\vec{a},\vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन अशून्य सदिश इस प्रकार है कि $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\frac{1}{3}|\vec{b}||\vec{c}|\,\vec{a}$ यह सदिश $\vec{b}$ और $\vec{c}$ के बीच न्यून कोण θ हो तो $\sin\theta=$

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

57. तीन सदिश $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ इस प्रकार है कि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$ तो $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}=$

(A) 0 (B) –7 (C) 7 (D) 1

58. यदि $\vec{u},\vec{v}$ और $\vec{w}$ तीन असमतलीय सदिश है तो $(\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}).[(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{v}-\vec{w})]=$

(A) 0 (B) $\vec{u}.\vec{v}\times\vec{w}$ (C) $\vec{u}.\vec{w}\times\vec{v}$ (D) $3\vec{u}.\vec{v}\times\vec{w}$

59. चार बिन्दु A,B,C और D जिनके स्थिति सदिश क्रमषः $7\hat{i}-4\hat{j}+7\hat{k}$, $\hat{i}-6\hat{j}+10\hat{k}$, $-\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ और $5\hat{i}-\hat{j}+5\hat{k}$ तो ABCD है

(A) वर्ग (B) समचतुर्भुज (C) आयत (D) इनमें से कोई नहीं

60. सदिष $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}+4\vec{k}$ और सदिष $\overrightarrow{AC}=5\vec{i}-2j+4\vec{k}$ त्रिभुज ABC की दो भुजायें है तो बिन्दु A से जाने वाली माध्यिका की लम्बाई है

(A) $\sqrt{18}$ (B) $\sqrt{72}$ (C) $\sqrt{33}$ (D) $\sqrt{288}$

61. मानाकि $\vec{u}=\hat{i}+\hat{j}$, $\vec{v}=\hat{i}-\hat{j}$ और $\vec{w}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ यदि इकाई सदिश $\hat{n}$ इस प्रकार है कि $\hat{u}.\hat{n}=0$ और $\hat{v}.\hat{n}=0$ तो $|\vec{w}.\hat{n}|=$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

62. यदि $\hat{a},\hat{b},\hat{c}$ तीन इकाई सदिष इस प्रकार है कि $\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}=0$ तो $\hat{a}.\hat{b}+\hat{b}.\hat{c}+\hat{c}.\hat{a}=$

(A) 3 (B) 0 (C) -1 (D) $-\frac{3}{2}$

63. तीन बिन्दुओं जिनके स्थिति सदिष क्रमषः $\hat{i}, \hat{i}+2\hat{j}$ और $\hat{i}+3\hat{k}$ है तो इन बिन्दुओं से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफलहै

(A) 5 (B) 4 (C) $3\sqrt{3}$ (D) 3

64. यदि $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})$ और $[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]\neq 0$ तो $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=$

(A) $\vec{B}\times\vec{C}$ (B) $\vec{A}\times\vec{B}$ (C) $\vec{0}$ (D) $\vec{C}\times\vec{A}$

65. $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=$

(A) $\vec{a}\vec{b}+\vec{c}$ (B) $\vec{a}+\vec{b}\vec{c}$ (C) $\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (D) $\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

66. $(\vec{a}.\hat{i})\hat{i}+(\vec{a}.\hat{j})\hat{j}+(\vec{a}.\hat{k})\hat{k}=$

(A) $-\vec{a}$ (B) $-3\vec{a}$ (C) $\vec{a}$ (D) 0

67. यदि $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ तो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण है

(A) $\pi/2$ (B) 0^0 (C) $\pi/3$ (D) $3\pi/4$

68. मानाकि $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ और $\vec{c}, \vec{a}$ के लम्बवत् समतलीय इकाई सदिष है तो $\vec{c}=$

(A) $\frac{-\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{-\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{\hat{i}-2\hat{j}}{\sqrt{5}}$ (D) $\frac{\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{3}}$

69. यदि $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j}, \vec{b} = \hat{i} + \hat{j}, \vec{c} = \hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ और $\vec{n}$ एक इकाई सदिश इस प्रकार है कि $\vec{b}.\vec{n} = 0, \vec{a}.\vec{n} = 0$ तो $|\vec{c}.\vec{n}|=$

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 2

70. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ तीन इकाई सदिश है तो $|\vec{a}-\vec{b}|^2 + |\vec{b}-\vec{c}|^2 + |\vec{c}-\vec{a}|^2$ का मान बड़ा नहीं है

(A) 4 से (B) 9 से (C) 8 से (D)6 से

Answers

EXERCISE # 1-A

1. C 2. C 3. D 4. C 5. B 6. A 7. C
8. D 9. B 10. C 11. C 12. A 13. C 14. D
15. D 16. B 17. B 18. A 19. BCD 20. ACD
21. AC 22. AD 23. ABC 24. AB

EXERCISE # 1-B

2. OP : PD=3:2 4. $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{j} - \hat{k})$

5. (i) $-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ (ii) $\frac{6}{\sqrt{19}}(6\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ (iii) $\frac{2\pi}{3}$

6. (i) 60^0 7. (i) $3(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ (ii) 16

8. (ii) 5 unit sq. 9. $\frac{6}{\sqrt{5}}$ unit

10. (i) sin a cos a (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. (i) 6 unit^3 (ii) $\sqrt{6}$ unit

12. (i) p=0; q=10; r=-3 (ii) -100

13. $\vec{x} = \vec{q} - \frac{(\vec{p}.\vec{q})\vec{p}}{2|\vec{p}|^2}$ 14. (i) No (ii) Yes

15. 3 16. $\vec{r}.(4\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}) = 45$ 17. $\frac{5}{3}$ unit

EXERCISE # 2-B

1. D 2. D 3. B 4. C 5. A 6. C 7. A
8. C 9. B 10. C 11. A 12. B 13. C 14. C
15. A 16. C 17. A 18. C 19. C 20. B 21. C
22. ABCD 23. ABC 24. BD 25. AB
26. AD 27. ACD

EXERCISE # 2-B

2. 21:4

7. (i) $\vec{R} = -\hat{i} - 8\hat{j} + 2\hat{k}$ (ii) $9(-\hat{j} + \hat{k})$

9. $\vec{r} = \left(\frac{6}{13}\hat{i} + \frac{5}{13}\hat{j}\right) + \lambda(-2\hat{i} + 7\hat{j} + 13\hat{k})$

11. (b) $\left[\sqrt{\frac{3}{8}}k; \frac{\sqrt{6}}{12}k\right]$ 12. $3\hat{i} + 3\hat{k}$

EXERCISE # 3

1. (A)$\rightarrow$(q), (B)$\rightarrow$(r), (C)$\rightarrow$(s),(D)$\rightarrow$(p)

2. (A)$\rightarrow$(r),(B)$\rightarrow$(q), (C)$\rightarrow$(q), (D)$\rightarrow$(s)

3. A4. D5. B6. C7.1 C7.2 A7.3 B

14. $\cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$ 15. $\pm\frac{-3\hat{i}+5\hat{j}+11\hat{k}}{\sqrt{155}}$ 16. 0

17. $-\frac{14}{3}\hat{i}-\frac{14}{3}\hat{j}-\frac{7}{3}\hat{k}$ 18. 0

EXERCISE # 4

1. A 2. A 3. D 4. C 5. C 6. B

7. CD 8. A

9. (a)$\rightarrow$(ii), (b)$\rightarrow$(iii), (c)$\rightarrow$(iv), (d)$\rightarrow$(i)

10. A 11. B 12. $\hat{w}=\hat{v}-2(\hat{a}.\hat{v})\hat{a}$ 13. C 14. C

16. C 18. (i) B (ii) C 20. B 21. C

8.1 A8.2 D8.3 C9. True10.

11. False 12. False 13. True

22. $\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}$,where BC=a, CA=b, AB=c

24. $\vec{v}_1=2\hat{i}, \vec{v}_2=-\hat{i}\pm\hat{j}, \vec{v}_3=3\hat{i}\pm2\hat{j}\pm4\hat{k}$

Are some possible values

25. (i) B (ii) A (iii) A

27. (i) B (ii) A (iii) AC

29. (i) D (ii) C (iii) AC

31. 6 32. $\pi/6$ 33. B

35. $p=\frac{1}{\sqrt{1+2\cos\theta}}$, $q=\frac{-2\cos\theta}{\sqrt{1+2\cos\theta}}$, $r=\frac{1}{\sqrt{1+2\cos\theta}}$

36. $\left(\frac{\pi}{4}\text{or}\frac{3\pi}{4}\right)$ 37. $(\vec{a})$ 38. A 39. A 40. C

41. D 43. D 44. D 45. C 46. D 47. D 48. C

49. B 50. A 51. D 52. D 53. A 54. C 55. C

56. D 57. B 58. B 59. D 60 C 61. D 62. A

63. A 64. C 65. C 66. C 67. C 68. A 69. C

70. B

MQB

EXERCISE # 1 (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. यदि $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}, \vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ और $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$, तो $|\vec{u}\times\vec{v}|$ बराबर है –

(A) $\sqrt{2(16-(\vec{a}.\vec{b})^2)}$ (B) $2\sqrt{(16-(\vec{a}.\vec{b})^2}$ (C) $2\sqrt{(4-(\vec{a}.\vec{b})^2)}$ (D) $\sqrt{2(4-(\vec{a}.\vec{b})^2)}$

2. एक रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो उस बिन्दु से गुजरती है, जिसका स्थिति सदिष $\vec{c}$ है, जो समतल $\vec{r}.\vec{n}=1$ के समान्तर तथा रेखा $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ के लम्बवत् है।

(A) $\vec{r}=\vec{c}+\lambda(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{n}$ (B) $\vec{r}=\vec{c}+\lambda(\vec{a}\times\vec{n})$

(C) $\vec{r}=\vec{c}+\lambda(\vec{b}\times\vec{n})$ (D) $\vec{r}=\vec{c}+\lambda(\vec{b}.\vec{n})\vec{a}$

3. बिन्दु L, M और N त्रिभुज ABC की भुजाओं पर इस तरह स्थित है कि
$\ell(AL) : \ell(LB) = \ell(BM) : \ell(MC) = \ell(CN) : \ell(NA) = m : n$ तो त्रिभुज LMN और ABC का क्षेत्रफल निम्न अनुपात में होगा।

(A) $\dfrac{m^2}{n^2}$ (B) $\dfrac{m^2-mn+n^2}{(m+n)^2}$ (C) $\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ (D) $\dfrac{m^2+n^2}{(m+n)^2}$

4. त्रिभुज ABC के अर्न्तगत एक बिन्दु 'P' इस तरह है कि $BC(\vec{PA})+CA(\vec{PB})+AB(\vec{PC})=0$, तो त्रिभुज ABC के लिये बिन्दु P है इसका –

(A) अन्तः केन्द्र (B) परिकेन्द्र (C) केन्द्रक (D) लम्बकेन्द्र

5. माना $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}, \vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ और $\vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ तीन अषून्य सदिष इस तरह है कि $\vec{c}$ एक इकाई सदिष हैं जो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दोनों के लम्बवत् है। यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के मध्य कोण $\dfrac{\pi}{6}$ है, तो $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2$ बराबर है –

(A) 0 (B) 1

(C) $\dfrac{1}{4}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$

(D) $\dfrac{3}{4}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)(c_1^2+c_2^2+c_3^2)$

6. $[(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c})\ (\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})\ (\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{a}\times\vec{b})]$ बराबर है –

(A) $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]^2$ (B) $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]^3$ (C) $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]^4$ (D) इनमें से कोई नहीं

7. एक घन के शीर्ष पर तीन बल लगाये जाते है जिनका मापांक 1, 2 और 3 के बराबर है और जिनकी दिषा उसके फलको के विकर्णो की दिषा में है, जो कि उस शीर्ष पर मिलते है। इन बलों के परिणामी बल का मापांक है।

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) इनमें से कोई नहीं

8. एक समान्तर चतुर्भुज ABCD दिया गया है। यदि $|\overrightarrow{AB}| = a$, $|\overrightarrow{AD}| = b$ तथा $|\overrightarrow{AC}| = c$, तो $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AB}$ का मान है –

(A) $\frac{3a^2+b^2-c^2}{2}$ (B) $\frac{a^2+3b^2-c^2}{2}$ (C) $\frac{a^2+b^2-3c^2}{2}$ (D) इनमें से कोई नहीं

9. यदि सदिष $a\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+b\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\hat{i}+\hat{j}+c\hat{k}$ $(a\neq b\neq c\neq 1)$ समतलीय है, तो $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}$ का मान है –

(A) 1 (B) –1(C) 0 (D) इनमें से कोई नहीं

10. सदिष $\vec{a} = -4\hat{i}+3\hat{k}$, $\vec{b} = 14\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}$ एक ही बिन्दु से बाहर निकलते हैं तथा एक सदिष $\vec{d}$ भी इसी बिन्दु से बाहर निकलता है और $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के बीच कोण को समद्विभाजित करता है तथा $\sqrt{6}$ मापांक रखता है तो $\vec{d}$ है –

(A) $\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ (B) $\hat{i}-+\hat{j}+2\hat{k}$ (C) $\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ (D) इनमें से कोई नहीं

11. किसी त्रिभुज की सभी माध्यिकाओं पर एक बिन्दु लिया जाता है जो शीर्ष से देखने पर माध्यिकाओं का 1 : 3 में विभाजित करता हे, इन बिन्दुओं से बनने वाले त्रिभुज के क्षेत्रफल का वास्तविक त्रिभुज के क्षेत्रफल में अनुपात होगा।

(A) 5 : 13 (B) 25 : 64 (C) 13 : 32 (D) इनमें से कोई नहीं

12. यदि $\vec{r}.(2\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})+\frac{3}{2}=0$ एक समतल का समीकरण है और $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ एक बिन्दु है तो उसके सामने वाली भुजा पर समतल से समान दूरी पर स्थित बिन्दु हैं।

(A) $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ (B) $3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ (C) $3\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ (D) $3(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$

13. रेखा $\overrightarrow{AB}$ का सदिष समीकरण $\vec{r} = (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})+t(6\hat{t}-3\hat{j}+2\hat{k})$ यदि A (1,1,1,), C(2,–1,2) है और d बिन्दु c की $\overrightarrow{AB}$ से न्यूनतम दूरी है।

(A) B(6,–3,2) (B) B(5,–4,1) (C) $d=\sqrt{2}$ (D) $d=\sqrt{6}$

14. यदि $\vec{b}$ एवं $\vec{c}$ दो परस्पर लम्बवत् इकाई सदिष है और $\vec{a}$ कोई एक सदिष है तो
$(\vec{a}.\vec{b})\vec{b}+(\vec{a}.\vec{c})\vec{c}+\frac{\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{b}\times\vec{c}|^2}(\vec{b}\times\vec{c})$ बराबर है –

(A) $\vec{a}$ (B) $\vec{b}$ (C) $\vec{c}$ (D) इनमें से कोई नहीं

15. एक दिये गये आयतीय समान्तर षट्फलक के पृष्ठों के विकर्णो से निर्मित समान्तर षट्फलक का आयतन दिये गये समान्तर षट्फलक के आयतन का m गुना है, तो m=

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) इनमें से कोई नहीं

16. 'm' के मनों का समुच्चय जिसके लिए सदिश $\vec{a} = m\hat{i} + (m+1)\hat{j} + (m+8)\hat{k}$, $\vec{b} = (m+3)\hat{i} + (m+4)\hat{j} + (m+5)\vec{k}$ & $\vec{c} = (m+6)\hat{i} + (m+7)\hat{j} + (m+8)\hat{k}$ असमतलीय हैं।

(A) R (B) R–{1} (C) R–{1, 2} (D) ϕ

17. $[\vec{d}\vec{b}\vec{c}]\vec{a} + [\vec{d}\vec{c}\vec{a}]\vec{b} + [\vec{d}\vec{a}\vec{b}]\vec{c} - \vec{d}[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ का मान है –

(A) 0 (B) $2[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}$ (C) $-2[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}$ (D) इनमें से कोई नहीं

18. किन्हीं चार बिन्दुओं के लिए P,Q,R,S के लिए $\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{QR}\times\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{RP}\times\overrightarrow{QS}\right|$,निम्न त्रिभुज के क्षेत्रफल का 4 गुना है।

(A) PQR (B) QRS (C) PRS (D) PQS

19. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ तीन असमतलीय सदिष है और $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ व्युत्क्रमणीय सदिष है तो $(\overrightarrow{\ell a} + \overrightarrow{mb} + \overrightarrow{nc}).(\overrightarrow{\ell p} + \overrightarrow{mq} + \overrightarrow{nr})$ बराबर है।

(A) $\ell^2 + m^2 + n^2$ (B) $\ell m + mn + n\ell$ (C) 0 (D) इनमें से कोई नहीं

20. एक सदिष $\hat{i} + x\hat{j} + 3\hat{k}$ को कोण θ से घुमाया जाता है, मापांक में दुगना कर दिया जाता है, तो यह सदिष $4\hat{i} + (4x-2)\hat{j} + 2\hat{k}$ बन जाता है, 'x' का मान है –

(A) $-\frac{2}{3}$ (B) $\frac{2}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) 2

21. तीन सदिष $\vec{a} = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 5\hat{j}$ तथा $\vec{c} = 4\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ दिये गये हैं। सदिष $3\vec{a} - 2\vec{b}$ का सदिष $\vec{c}$ पर प्रक्षेप है।

(A) 11 (B) –11 (C) 13 (D) इनमें से कोई नहीं

22. एक पिरामिड AOBC का आधार एक समबाहु त्रिभुज OBC है जिसकी प्रत्येक भुजा $4\sqrt{2}$ के बराबर है। मूलबिन्दु 'O' को निर्देषी लिया गया है। AO त्रिभुज ΔOBC तल के लम्बवत् है। और $|\overrightarrow{OA}| = 2$ तो दो असमतलीय देखाओं के बीच के कोण की कोज्या (cosine) ज्ञात करो जबकि एक रेखा A और OB के मध्य से गुजरती है तथा दूसरी रेखा 'O' तथा BC के मध्य बिन्दु से गुजरती है।

(A) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

23. सदिष $\alpha\hat{i}+\beta\hat{j}+\gamma\hat{k}$ द्वारा दो सदिष $2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ के तल से बनाया गया निम्न कोण $\cot^{-1}\sqrt{2}$ है, तो

(A) $\alpha(\beta+\gamma)=\beta\gamma$ (B) $\beta(\gamma+\alpha)=\gamma\alpha$ (C) $\gamma(\alpha+\beta)=\alpha\beta$ (D) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$

24. यदि $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots. A_n$ एक समबहुभुज के शीर्ष है, जिसकी n भुजायें है और O उसका केन्द्र हैं, तो $\sum_{i=1}^{n-1}\left(\overrightarrow{OA_i}\times\overrightarrow{OA_{i+1}}\right)=$

(A) $(1-n)\overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_1}$ (B) $(1-n)\,\overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_1}$ (C) $N\overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_1}$ (D) इनमें से कोई नहीं

25. एक बिन्दु P जिसका स्थिति सदिष $7\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ है का एक रेखा जिसका सदिष समीकरण $\vec{r}=9\hat{i}+5\hat{j}+5\hat{k}+\lambda(\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k})$ है के सापेक्ष प्रतिबिम्ब का स्थिति सदिष है।

(A) (–9, 5, 2) (B) (9, 5, –2) (C) (9, –5, –2) (D) इनमें से कोई नहीं

एक से अधिक विकल्प सही

26. यदि $\vec{r}=\hat{i}+\hat{j}+\lambda(2\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k})$ तथा $\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})=3$ क्रमषः एक रेखा और एक समतल के समीकरण है तो निम्न में से कौनसा गलत है ?

(A) रेखा समतल के लम्बवत् है।
(B) रेखा समतल में स्थिति है।
(C) रेखा समतल के समान्तर है पर उसमें स्थित नहीं है।
(D) रेखा, समतल को किसी कोण पर काटती है।

27. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ तथा $\vec{d}$ बिन्दुओं A, B, C एवं D के त्रितिमीय दिषा में क्रमषः स्थिति है और A, B, C एवं D में से कोई भीं तीन संरेखीय नहीं है और सम्बन्ध $3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}-2\vec{d}=0$ को सन्तुष्ट करते हैं तो

(A) A, B, C और D समतलीय है।

(B) B और D को जोड़ने वाली रेखा बिन्दु A तथा C को जोड़ने वाली रेखा को 2 : 1 में विभाजित करती है।

(C) बिन्दु A और C को जोड़ने वाली रेखा B और D को जोड़ने वाली रेखा को 1 : 1 में विभाजित करती है।

(D) चार सदिष $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ और $\vec{d}$ रेखीय परतन्त्र हैं।

28. इकाई सदिष $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समतलीय है। एक इकाई सदिष $\vec{d}$ उनके लम्बवत् है।
यदि $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=\frac{1}{6}\hat{i}+\frac{1}{3}\hat{j}+\frac{1}{3}\hat{k}$, और $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के मध्य कोण 30^0 है, तो $\vec{c}$ है।

(A) $(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})/3$ (B) $(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})/3$ (C) $(2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})/3$ (D) $(-\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})/3$

29. माना $\vec{p}=2\hat{i}+3\hat{j}+a\hat{k}, \vec{q}=b\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}$ और $\vec{r}=\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ है। यदि $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ समतलीय है और $\vec{p}\cdot\vec{q}=20$, तो a और b के मान है –

(A) 1, 3 (B) 9, 7 (C) 5, 5 (D) 13, 9

30. $\alpha \in [0.2\pi]$ के समान जिसके लिए सदिश $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + (\sin 2\alpha)\hat{k}$, Z-अक्ष के साथ अधिक कोण बनाता है और सदिश $\vec{b} = (\tan\alpha)\hat{i} - \hat{j} + 2\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}}\,\hat{k}$ एवं $\vec{c} = (\tan\alpha)\hat{i} + (\tan\alpha)\hat{j} - 3\sqrt{\cos\frac{\alpha}{2}}\,\hat{k}$ लम्बवत् हैं, होगें –

(A) $\tan^{-1} 3$ (B) $\pi - \tan^{-1} 2$ (C) $\pi + \tan^{-1} 3$ (D) $2\pi - \tan^{-1} 2$

31. एक Δ ABC में मानाकि M, AB का मध्य बिन्दु D, $\angle C$ के अर्धक का पाद है। तो अनुपात $\frac{\Delta CDM}{\Delta ABC}$ है –

(A) $\frac{1}{4}\frac{a-b}{a+b}$ (B) $\frac{1}{2}\frac{a-b}{a+b}$

(C) $\frac{1}{2}\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{A+B}{2}$ (D) $\frac{1}{4}\cot\frac{A-B}{2}\tan\frac{A+B}{2}$

32. यदि $\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $\vec{b} = y\hat{i} + z\hat{j} + x\hat{k}$ और $\vec{c} = z\hat{i} + x\hat{j} + y\hat{k}$, तो $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ है –

(A) $(y-z)\,\hat{i} + (z-x)\,\hat{j} + (x-y)\,\hat{k}$ के समान्तर

(B) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ के लम्बवत्

(C) $(y+z)\,\hat{i} + (z+x)\,\hat{j} + (x+y)\,\hat{k}$ के लम्बवत्

(D) $x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\hat{k}$ के लम्बवत्

33. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन अशून्य सदिश है जो स्थिति $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ तथा $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{a}$ को संतुष्ट करते है, तो –

(A) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ युग्मों के परस्पर लम्बवत् है। (B) $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = |\vec{a}|^2$

(C) $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = |\vec{c}|^2$ (D) $|\vec{b}| = |\vec{c}|$

EXRECISE #2 (विषयात्मक प्रश्न)

1. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु A(1, 2, 3), B(3, 4, 7), C(–3, –2, –5) संरेखीय है और वह अनुपात ज्ञात करो जिसमें B, AC को विभाजित करती है।

2. बिन्दु A, B, C के स्थिति सदिश क्रमषः (1, 1, 1) , (1, –1, 2) तथा (0, 2, –1) है। ABC द्वारा प्राप्त समतल के समानान्तर इकाई सदिश जो (1, 0, 1) के लम्बवत् है।

3. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ समान मापांक के परस्पर लम्बवत् सदिश है, $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ से समान झुकाव रखने वाला सदिश ज्ञात करो।

4. यदि ABC एक त्रिभुज है जिसमें AB=AC है। यदि BC का मध्य बिन्दु D है, यदि D से AC पर खीचे गये लम्ब का पाद E है तथा DE का मध्य बिन्दु F है। सिद्ध कीजिए कि AF, BE के लम्बवत् है।

5. (i) OABC एक समचतुष्फलक है, ΔOAB का परिकेन्द्र D है और भुजा AC का मध्य बिन्दु E है। सिद्ध कीजिए कि DE, समचतुष्फलक की भुजा की आधी है।

   (ii) यदि V , चतुष्फलक का आयन है और V' केन्द्रकों के द्वारा बनाये गये चतुष्फलक का आयतन है तथा V=KV' तो K का मान ज्ञात कीजिए।

6. माना ABC एक त्रिभुज है। भुजा AB, BC और CA पर क्रमषः बिन्दु M, N और P है इस तरह $\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CA} = \alpha$. सिद्ध कीजिए कि सदिष $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{BP}$ तथा $\overrightarrow{CM}$ एक त्रिभुज बनाते है और α का मान भी ज्ञात कीजिए ताकि इन सदिषों द्वारा निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल न्यूनतम हो।

7. सिद्ध कीजिए कि समचतुष्फलक OABC का आयतन $V^2 = \frac{\vec{a}^2\vec{b}^2\vec{c}^2}{36}\begin{vmatrix} 1 & \cos\psi & \cos\Phi \\ \cos\psi & 1 & \cos\theta \\ \cos\Phi & \cos\theta & 1 \end{vmatrix}$ जहाँ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ मूलबिन्दु 'O' के सापेक्ष स्थिति सदिष है और θ , Ψ , Φ भुजाओं OB, OC; OB OA और OA, OC के बीच क्रमषः कोण है।

8. यदि $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ और $C(\vec{c})$ तीन असरंखीय बिन्दु है, और मूलबिन्दु बिन्दुओं A, B, C के समतल में स्थित नही ंतो किसी बिन्दु $P(\vec{p})$ जो कि ,ΔABC के तल में है। सिद्ध कीजिए कि

   (i) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{p}.(\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} x \vec{c} + \vec{c} x \vec{a})$

   (ii) सदिष $\vec{v}$ त्रिभुज ABC के तल के लम्बवत् 'O' से खींचा गया सदिष निम्न तरह दर्षाया जाता है

   $$v = \frac{[abc](\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{e} + \vec{c} \times \vec{a})}{4\Delta^2}$$ जहाँ $\vec{\Delta}, \Delta\,ABC$ का सदिष क्षेत्रफल है।

9. दी गई रेखाओं $\vec{r} = (8+3\lambda)\hat{i} - (9+16\lambda)\hat{j} + (10+7\lambda)\hat{k}$ और $\vec{r} = (15\hat{i} + 29\hat{j} + 5\hat{k}) + \mu(3\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k})$ के बीच न्यूनतम दूरी तथा उस न्यूनतम दूरी वाली रेखा का सदिष समीकरण ज्ञात करो।

10. निमन को सिद्ध करने के लिये सदिष का उपयोग करो।

   (i) किसी स्थिर रेखा द्वाराआयतीय अक्षों पर काटे गये अन्तः खण्डों के वर्गो का योग, मूल बिन्दु से गुजरने वाले सी आयतीय अक्षों के समुच्चय के लिए समान होता है।

   (ii) यदि दो वृत्त प्रतिच्छेदित होते हैं तो उनके केन्द्रकों को मिलाने वाली रेखा उनकी उभयनिष्ठ जीवा के लम्बवत् होती है।

11. सिद्ध कीजिए कि दिये गये समतलों $\vec{r} = (m\vec{j} + n\vec{k}) = 0$, $\vec{r}.(n\vec{k} + \ell\vec{i}) = 0$,

   $\vec{r}.(\ell\vec{i} + m\hat{j}) = 0$, $\vec{r}.(\ell\vec{i} + m\hat{j} + n\hat{k}) = p$ द्वारा घिरे समचतुष्फलक का आयतन $\frac{2p^3}{3\ell mn}$ है।

12. किसी चतुष्फलक के शीर्ष बिन्दुओं के स्थिति सदिष $A(3\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})$, $B(3\hat{i}+\hat{j}+5\hat{k})$, $C(4\hat{i}+3\hat{k})$ तथा $D(\hat{i})$ है, तो ढालू फलक ADC और आधार ABC के बीच निम्न कोण ज्ञात करो।

13. तीन सदिष $\vec{a}=4\hat{i}-2\hat{j}+\vec{k};\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{c}=2\hat{i}+\hat{k}$ सभी एक बिन्दु जिसका स्थिति सदिष $\hat{i}-\hat{j}$ है से खींचे जाते है। उनके अन्तिम सिरों को रखने वाले तल का समीकरण ज्ञात करो।

14. रेखा L_1 सदिष $\vec{\alpha}=-3\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$ के समान्तर है और बिन्दु A(7, 6, 2) से गुजरती है और रेखा L_2 सदिष $\vec{\beta}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ के समान्तर है और एक बिन्दु B(5, 3, 4) से गुजरती है। अब एक रेखा L_3 एक सदिष $\vec{r}=2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ के समान्तर है और रेखा L_1 तथा L_2 को बिन्दु C और D पर क्रमषः प्रतिच्छेदित करती है तो $\left|\overrightarrow{CD}\right|$ ज्ञात करो।

15. AB, AC और AD एक घनाभ की आसन्न भुजायें है। घनाभ के बिन्दु A से गुजरने वाला विकर्ण और इससे दूर जाता है, सदिष $\vec{a}$ है। फलक जो शीर्ष A, B, C तथा A, B, D रखती है का क्षेत्रफल सदिष $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ क्रमषः है। यदि प्रत्येक भुजा AB और AC का विकर्ण $\vec{a}$ पर प्रक्षेप $\frac{|\vec{a}|}{3}$ है, तो $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ तथा $|\vec{a}|$ के रूप में सदिष $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ तथा $\overrightarrow{AD}$ को प्राप्त कीजिए।

Answers

EXERCISE # 1

1.	B	2.	C	3.	B	4.	A	5.	C	6.	C	7.	B
8.	A	9.	A	10.	A	11.	B	12.	B	13.	C	14.	A
15.	A	16.	A	17.	A	18.	B	19.	A	20.	D	21.	B
22.	D	23.	A	24.	A	25.	B	26.	ACD		27.	ACD	
28.	AD	29.	AD	30.	BD	31.	BC	32.	ABCD		33.	ABC	

EXERCISE # 2

1. externally in the tatio 1 : 3

2. $\pm\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}\right)$ 3. $\mu\,(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

5. (ii) 27 6. $\lambda=\frac{1}{2}$

9. 14, $\vec{r}=(5\hat{i}+7\hat{j}+3\hat{k})+t(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$

12. $\tan^{-1}\frac{5}{2}$ 13. $(2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}).\vec{r}=3$ 14. 9